منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

33 ⓒ علوم تجريبية - 2020 - الموضوع الأول (04 نقاط)

يحتوي وعاء U على 4 كريات حمراء و 6 سوداء، و يحتوي وعاء V على 5 كريات حمراء و 3 سوداء و كل الكريات متماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس. نسحب عشوائيا كريتين في ان واحد من احد الوعاءين بالكيفية التالية :

نقوم بسحب بطاقة واحدة عشوائيا من كيس يحتوي على 6 بطاقات متماثلة و مرقمة من 1 الى 6 ، اذا تحصلنا على احد الرقمين 3 او 5 نسحب الكريتين من U و في باقي الحالات نسحب الكريتين من V نسمي A الحدث : " الحصول على احد الرقمين 3 او 5 "

نسمي M الحدث :

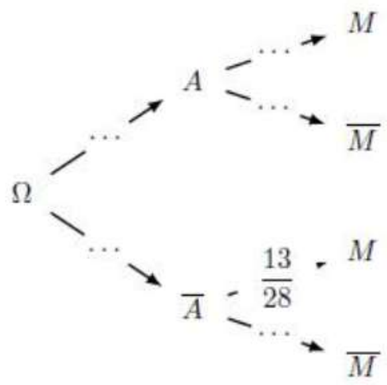
" الحصول على كريتين من نفس اللون "

1) تحقق ان $P(\overline{A})$ احتمال السحب من الوعاء V هو $\frac{2}{3}$

2) علما ان الكريتين المسحوبتين من U ، بين ان احتمال ان تكونا من نفس اللون هو $\frac{7}{15}$

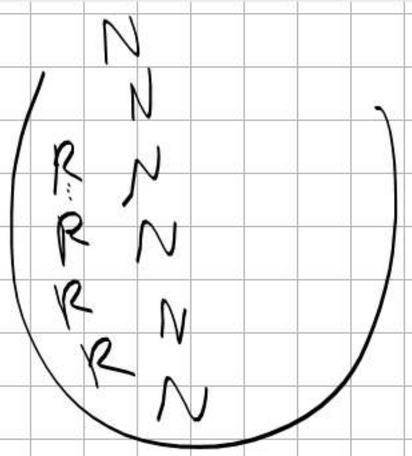
3) انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم اكملها و استنتج $P(M)$

4) احسب $P_{\overline{M}}(A)$ احتمال السحب من الوعاء U علما ان الكريتين المسحوبتين مختلفتا اللون؟

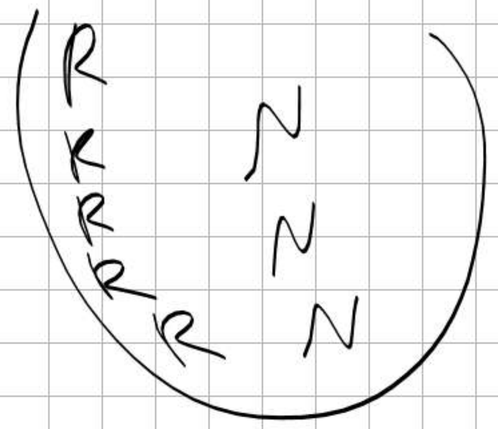


دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك
0699 320 999 / 044 77 64 11

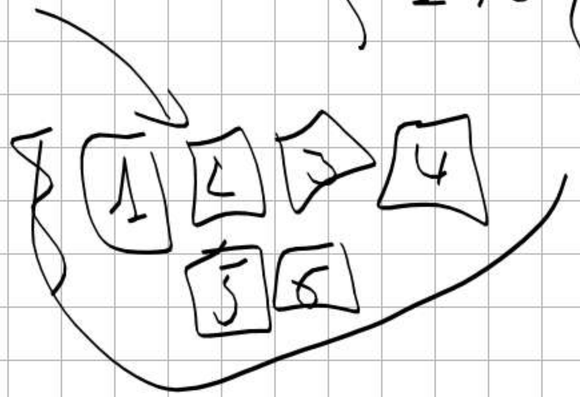
منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com



$U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$



$V = \{2; 3; 4; 5; 6\}$



دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك
0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

نستنتج أن $p(\bar{A}) = \frac{2}{3}$

$p(\bar{A}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ✓ الحصى $\bar{A}$

$\bar{A}$ الحصول على $\{2,3,4,6\}$

$P_A(M)$

* المطلوب هو احتمال

$$P_A(M) = \frac{C_4^2 + C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{6+15}{45} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

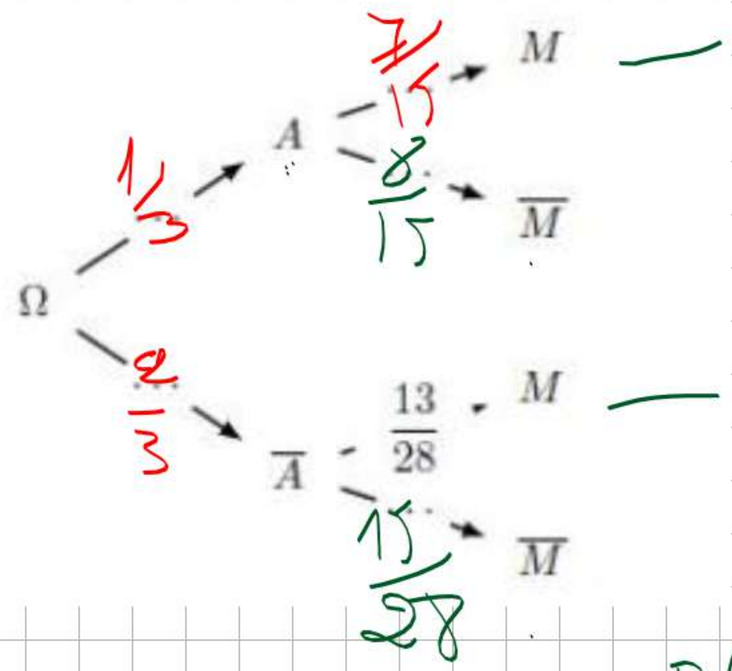
$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 4\times 3$$

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6\times 5\times 4!}{2\times 4!}$$

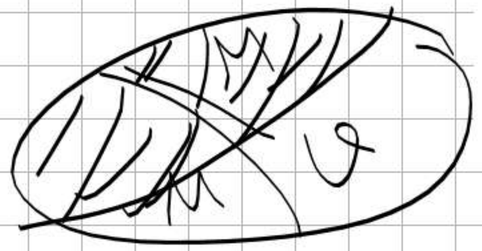
$$C_{10}^2 = \frac{10!}{8!2!} = \frac{10\times 9}{2}$$

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك
0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com



$1 - \frac{7}{15} = \frac{15}{15} - \frac{7}{15}$



ب

P(M) ب

$$P(M) = \frac{1}{3} \times \frac{7}{15} + \frac{2}{3} \times \frac{13}{28}$$

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك
0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

$P(A) \neq 0 \; ; \; P(B) \neq 0$

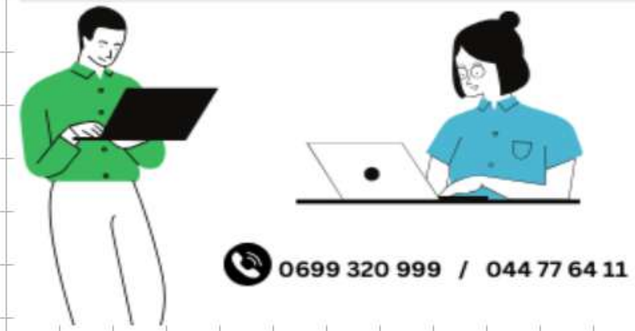
$$P(A \cap B) = P(A) \, P_A(B)$$
$$P(A \cap B) = P(B) \, P_B(A)$$

نحقق أن : $P_{\overline{M}}(A)$

$$P_{\overline{M}}(A) = \frac{P(\overline{M} \cap A)}{P(\overline{M})} = \frac{P(A) \, P_A(\overline{M})}{P(\overline{M})}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{8}{15}}{\frac{2}{3} \times \frac{15}{28} + \frac{1}{3} \times \frac{8}{15}} = \frac{112}{449}$$

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك


0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

37 علوم تجريبية - 2018 - الموضوع الأول (04 نقاط)

يحوي صندوق 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها اربع كريات بيضاء مرقمة بـ : 3،2،2،1 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ : 3،2،2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : 3،3،2

نسحب عشوائيا و في ان واحد 3 كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الحادثتين A : "الكريات الثلاث المسحوبة تحمل الوان العلم الوطني"

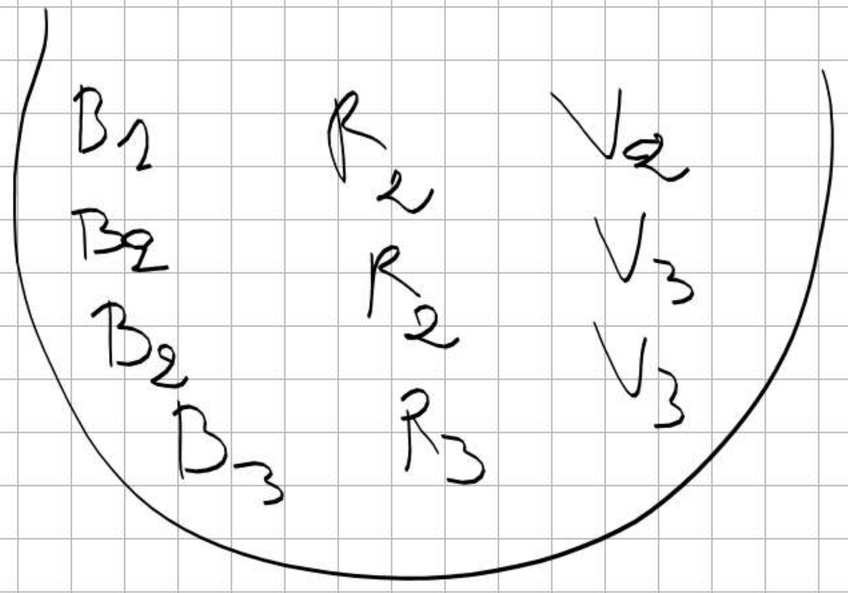
و B : "الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم"

1) ا) احسب : $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب.

ب) بين ان : $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$. ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا.

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و احسب امله الرياضياتي $E(X)$



كل التوقعات لها 3 كريات من بين 10

$Card(\Omega) = C_{10}^{3} = 120$

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك
0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

A - "الكرية = السوية تحمل الوان العلم الوطني"

كرة بيضاء و كرية حمراء و كرية خضراء

$$P(A) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{4 \times 3 \times 3}{120} = \frac{3}{10}$$

B - "الكريات كانت تحمل نفس الرقم"

هذه الحالة تشمل الرقم 1 أو الرقم 2 أو الرقم 3

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك
0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

$$P(B) = \frac{C_5^3 + C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{10+4}{120} = \frac{7}{60}$$

$$\frac{14}{120} = \frac{2\times 7}{2\times 60} = \frac{7}{60}$$

$P(A \cap B)$ حساب

$A \cap B$ حساب كرات تمثل ألوان العلم الوطني

$$P(A \cap B) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_{10}^3} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك
0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\Omega) \longrightarrow X(\Omega)$ (نقطة)

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك
0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

42 | تقني رياضي - 2018 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

كيس به 7 كريات متماثلة، لا نفرق بينها باللمس، منها 3 بيضاء و 4 خضراء.
نسحب عشوائيا و في ان واحد كرتين من الكيس.

1) ا) احسب احتمال الحادثة A : "سحب كرتين مختلفتين في اللون".

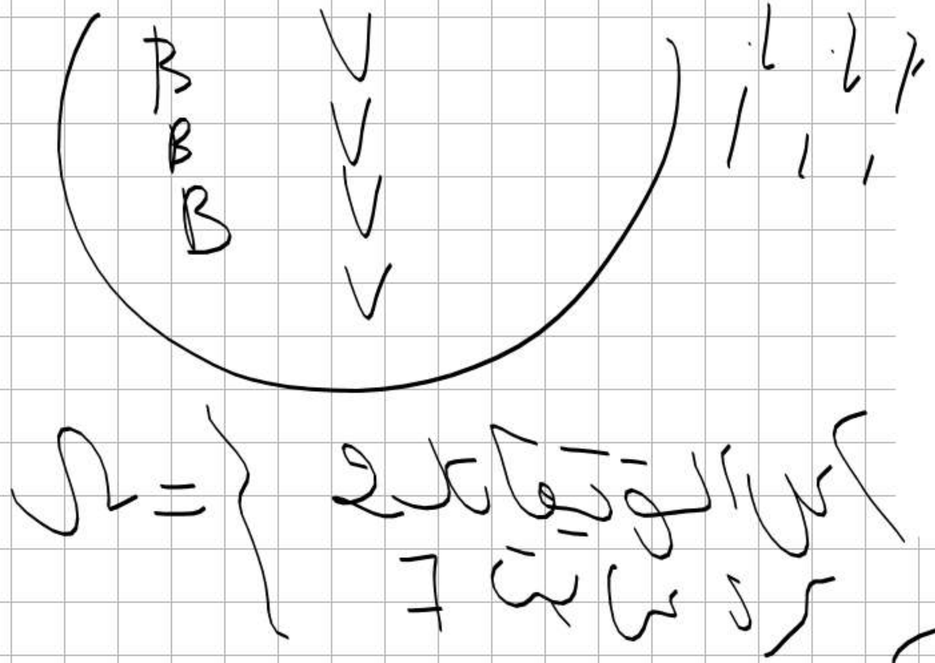
ب) احسب احتمال الحادثة B : "سحب كرتين من نفس اللون"

2) نقترح اللعبة التالية : للمشاركة يدفع اللاعب $\alpha(DA)$ ، (حيث α عدد طبيعي معطى و DA تعني دينار جزائري).

فاذا سحب كرتين بيضاوين يتحصل على $100DA$ ، واذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50DA$ ، واذا سحب كريتين خضراوين يخسر ما دفعه. وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح او خسارة اللاعب بدلالة α.

ا) برر ان قيم المتغير العشوائي هي $\{100-\alpha, 50-\alpha, -\alpha\}$ ثم عرف قانون احتماله.

ب) بين ان الامل الرياضياتي للمتغير العشوائي X بدلالة α هو : $E(X) = -\alpha + \frac{300}{7}$
ثم اوجد اكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.



دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك

0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

A = " سحب كريتين مختلفتين اللون

معاً دون إرجاع "

$$P(A) = \frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_7^2} = \frac{3 \times 4}{21} = \frac{4}{7}$$

B = " سحب كريتين من نفس اللون

أي حالتين إما من الأصفر أو من الأحمر "

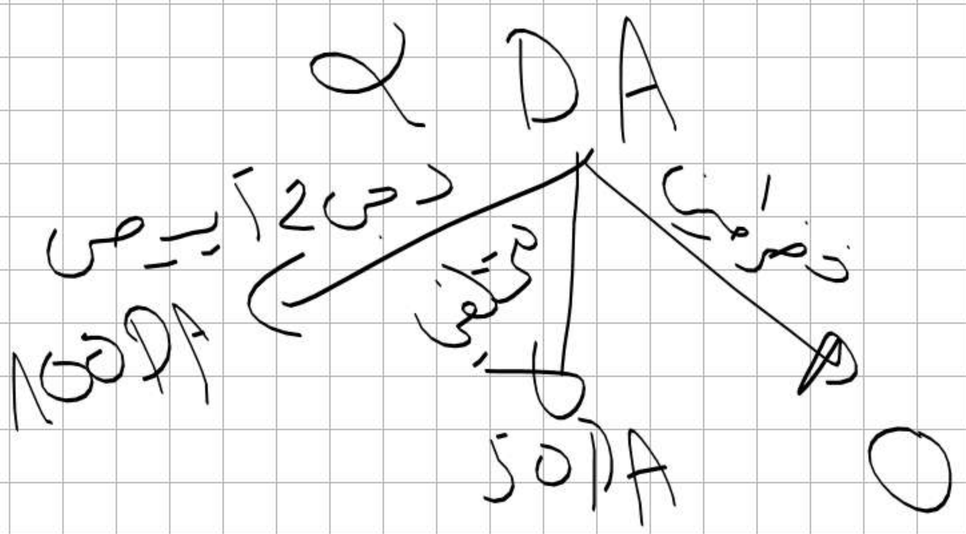
$$P(B) = \frac{C_3^2 + C_4^2}{C_7^2} = \frac{3 + 6}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك
0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

$B = \overline{A}$ (ص ع)

$P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) - - -$



دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك
0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

X : يعني ربح أو خسارة الاعب

التكلفة — المبلغ المدفوع = X
الحقيقية

ربح — 100 دج إذا اشترى كريم بيضاوي

— 50 دج

— ؟

—

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك

0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

x_i	$100-x$	$50-x$	$-x$
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$	$\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$	$\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$

$$P(X=100-x)=\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{3}{21}$$

$$P(X=50-x)=\frac{12}{21}\quad,\quad P(X=-x)=\frac{C_4^1}{C_7^2}=\frac{4}{21}$$

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك
0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

$$E(X) = \sum x_i P(X = x_i)$$

$$= (100-x)\frac{1}{7} + (50-x)\times\frac{4}{7} + (-x)\times\frac{2}{7}$$

$$= \frac{100 - x + 200 - 4x - 2x}{7}$$

$$= \frac{300 - 7x}{7} = \frac{300}{7} - \frac{7x}{7}$$

$$= -x + \frac{300}{7}$$

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك

0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

$E(X)=0$ لعبة عادلة

$E(X)>0$ اللعبة لصالح اللاعب (لصالح المؤسسة)

$E(X)<0$ اللعبة لصالح المؤسسة (لصالح اللاعب)

$E(X)>0$ أي $\frac{x+300}{7}>0$

$x+300>0$

$x>-300$

$\frac{300}{7}\approx 42,85$

$x<\frac{300}{7}$

$x=42$

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك
0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

ملخص: حول الأعداد المركبة

$\square + 2 = 4$

$IN \quad \square = 4 - 2 = 2$

$\square + 3 = 1$

$IN \quad \square = 1 - 3$

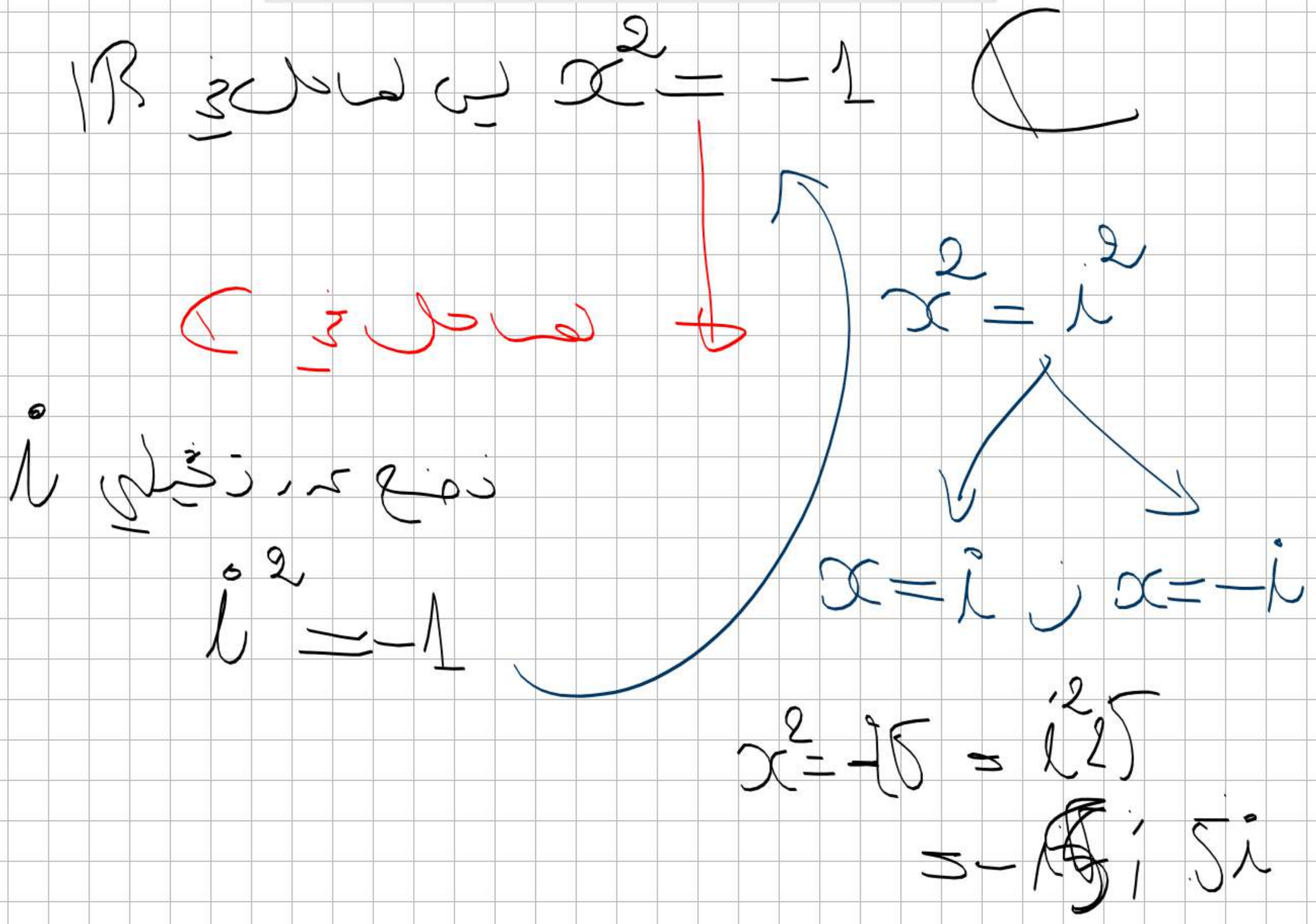
$\square = -2$

$IN \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset IR \subset \mathbb{C}$

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك

0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com



دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك
0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

1 تعاريف ونتائج:

1 تعاريف

كل عدد مركب z يُكتب من الشكل $\boxed{z = x + iy}$،
حيث x وَ y **عددان حقيقيان**
وَ i عدد تخيّلي يُحقق $\boxed{i^2 = -1}$.

ملاحظات وترميز:

- الكتابة $\boxed{z = x + iy}$، تسمى **الشكل الجبري** لـz.
- x يسمى **الجزء الحقيقي** لـz ونرمز له بـ: $\boxed{x = Re(z)}$.
- y يسمى **الجزء التخيلي** لـz ونرمز له بـ: $\boxed{y = Im(z)}$.
- إذا كان: $Im(z) = 0$؛ فإنّ: $z = x$ فنقول أنّ: z **حقيقي**.
  إذا كان: $Re(z) = 0$؛ فإنّ: $z = yi$ فنقول أنّ: z **تخيلي صرف (أو تخيلي بحت)**.
  إذا كان: $Re(z) = Im(z) = 0$؛ فإنّ: $z = 0$ إذن: 0 هو في آن واحد **حقيقي وَتخيلي صرف**.

نتيجة:

$\boxed{z = 0}$، **معناه:** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك
0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

❷ تساوي عددين مركبين

تعريف:

يكون عددان مركبان z و z' **متساويين**
إذا وفقط إذا كان لهما

- نفس **الجزء الحقيقي**
- وَنفس **الجزء التخيلي**.

بوضع:

$z = x + iy$،

وَ

$z' = x' + iy'$.

$z = z'$، **معناه:** $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.

$z z' = (x+iy)(x'+iy')$

$z = m + i$ $\quad z = 2 + i$

$a = m$

$1 = 1$

$z = z' \Leftrightarrow a = a' \text{ و } b = b'$

$z + z' = (a + ib) + (a' + ib')$

$= (a + a') + (b + b')i$

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك
0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

③ التمثيل الهندسي لعدد مركب

- نُنسب المستوي إلى **معلم متعامد ومتجانس** $(O;\vec{u};\vec{v})$.
- يسمى كل من M و $\overrightarrow{OM}$ **صورة** z.
- ويسمى z **لاحقة** كل من M و $\overrightarrow{OM}$؛ نكتب: $M(z)$؛ $\overrightarrow{OM}(z)$.

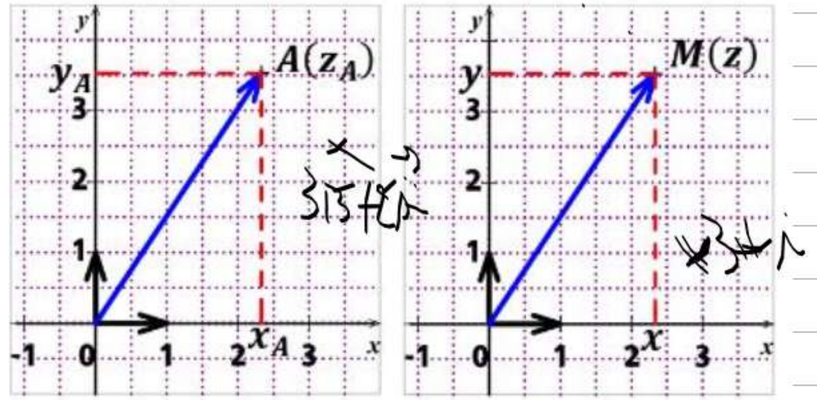
يُمثل العدد المركب $z = x + iy$ بالنقطة $M(x;y)$.

نتائج:

- محور **الفواصل** (محور **الأعداد الحقيقية**)
- محور **التراتيب** (محور **الأعداد التخيلية**)
- **لاحقة الشعاع** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ هي: $z_A + z_B$
- **لاحقة الشعاع** $\overrightarrow{AB}$ هي: $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

حيث: $A(z_A)$ و $B(z_B)$

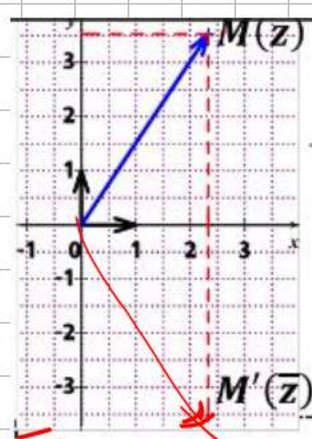
$z_A = x_A + iy_A$ ($Re(z_A) = x_A$ و $Im(z_A) = y_A$)



1

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك
0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com



2 مرافق عدد مركب:

1 مرافق عدد مُركب

صورتا العددين المُركبين **المترافقين**؛ **متناظرتان** بالنسبة إلى **محور الفواصل**

مُرافق العدد المركب $z = x + iy$، هوَ العدد المُركب $\overline{z} = x - iy$.

(نقوم **بتغيير إشارة الجزء التخيلي** فقط)

2 خواص المُرافق

خواص مباشرة من التعريف

① $\overline{\overline{z}} = z$

② $z + \overline{z} = 2x$

③ $z - \overline{z} = 2iy$

④ $z.\overline{z} = x^2 + y^2$

- z حقيقي، **معناه:** $\overline{z} = z$.
- z تخيلي صرف، **معناه:** $\overline{z} = -z$.

المُرافق والعمليات

① $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ ② $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$

③ $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$ ④ $(k \in \mathbb{R})\ \overline{kz} = k\overline{z}$

⑤ $(z' \neq 0)\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ ⑥ $(z \neq 0 \text{ و } k \in \mathbb{R})\ \overline{\left(\frac{k}{z}\right)} = \frac{k}{\overline{z}}$

⑦ $(n \in \mathbb{N}^*)\ \overline{z^n} = \overline{z}^n$

☞ **يُمكن** استخدام **المُرافق** لإثبات أنّ z **حقيقي**، **أو تخيلي صرف**.

$\overline{kz} = k\overline{z}$

$z + \overline{z} = 2\Re(z)$.

$x + iy + x - iy = 2x$

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك
0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

$$\frac{5}{\sqrt{x-3}}$$

$$\overline{(x+iy)} = \overline{(x-iy)}$$

$$= x+iy$$

$$x-y \longleftarrow x+y$$

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy)$$

$$= x^2 - (iy)^2$$

$$= x^2 - i^2 y^2$$

$$= x^2 + y^2$$

$$z = x+iy$$

$$\bar{z} = x-iy$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك
0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

التمرين-1-: اكتب على الشكل الجبري الاعداد المركبة التالية:

$Z_1 = (2+3i)+5(3-4i)$	$Z_2 = 2(2+i)(3-4i)$
$Z_3 = \dfrac{\sqrt{3}+2i\sqrt{2}}{i}$	$Z_4 = \dfrac{\sqrt{2}-i}{1-i}$

1. ليكن العددين المركبين التاليين: $Z_1 = 2+i$ ، $Z_2 = 1-i$

• $2\overline{Z_1} - 3\overline{Z_2}$	• $i\overline{Z_1} - \overline{Z_2} - \overline{Z_2}$

$Z_2 = \dots + \dots i$

$Z_1 = (2+3i)+5(3-4i)$

$= 2+3i+15-20i$

$= 17-17i$

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك

0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

3 طويلة وعُمدة عدد مركب:

الطويلة

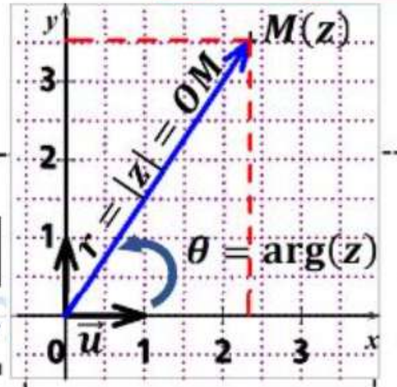
1 تعريف

$z = x + iy \neq 0$ صورته M.

طويلة z:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = OM$$

- في حالة: $z = 0$، فإنّ: $|z| = 0$.



العُمدة

1 تعريف

عُمدة z:

$$\theta = \arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \cdots + 2k\pi$$

- ...، هو **قيس بالراديان** للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك
0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

❷ خواص الطويلة

خواص الطويلة

① $|\overline{z}| = |-z| = |z|$ ② $z.\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

③ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ ④$(z' \neq 0)$ $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ $(z \neq 0)$

⑤ $|z.z'| = |z|.|z'|$ ⑥ $|z^n| = |z|^n$ $(n \in \mathbb{N})$

❷ خواص العُمدة

خواص العُمدة

(تذكر: خواص " ln ")

① $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')$

② $(z' \neq 0)$ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

③ $(z \neq 0)$ $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$

④ $(n \in \mathbb{N}^*)$ $\arg(z^n) = n\arg(z)$

❸ إضافات

- ☹ $|z + z'| \neq |z| + |z'|$ وَ☹ $|z - z'| \neq |z| - |z'|$.
- ☺ $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$ وَ☺ $\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi$.

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك

0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

4 الشكلان المثلثي والأسي لعدد مركب:

لكتابة عدد مركب z على **الشكل المثلثي** أو **الأسّي**، نحتاج إلى **حساب طويلته** r و**عُمدته** θ.

1 الإنتقال من شكل إلى آخر

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases}$$ نستنتج:

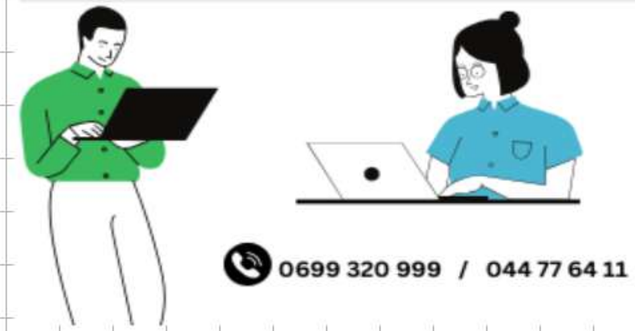
$$\theta = \arg(z) = \cdots + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z} \text{ حيث})$$

الشكل الجبري	الشكل المثلثي	الشكل الأسي
$z = x + iy$	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$	$z = re^{i\theta}$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$ (ترميز أولر)

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك


0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

قواعد الحساب على الشكل الأسي

(دستور **موافر**) $n \in \mathbb{N}^*$ ؛ حيث $\boxed{(e^{i\theta})^{n} = e^{in\theta}}$

نجد:

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^{n} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

إذن: $\boxed{z^{n} = (re^{i\theta})^{n} = r^{n}e^{in\theta}}$ ؛ (حيث $n \in \mathbb{N}^*$)

ومنه:

$$\boxed{r^{n} = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{n} = r^{n}[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]}$$

قواعد الحساب على الشكل الأسي

(**تذكر:** خواص " exp ")

① $\boxed{e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}}$

② $\boxed{\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}}$

③ $\boxed{\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}}$

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك

0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

تُستعمل للتحويل الى الشكل المثلي، ولها إستعمالات إخرى:

① $\begin{cases}\cos(x+2k\pi)=\cos(x)\\ \sin(x+2k\pi)=\sin(x)\end{cases};(k\in\mathbb{Z})$

② $\begin{cases}\cos(-x)=\cos(x)\\ \sin(-x)=-\sin(x)\end{cases}$

③ $\begin{cases}\cos(\pi+x)=-\cos(x)\\ \sin(\pi+x)=-\sin(x)\end{cases}$

④ $\begin{cases}\cos(x-\pi)=-\cos(x)\\ \sin(\pi-x)=\sin(x)\end{cases}$

⑤ $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x)\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)\end{cases}$

⑥ $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)\end{cases}$

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك

0699 320 999 / 044 77 64 11

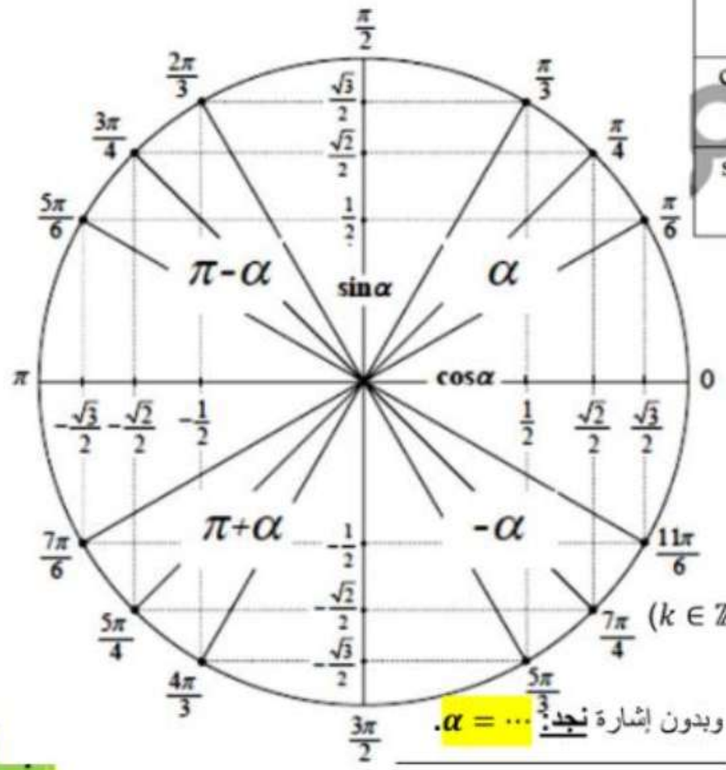
منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

⑤ الدائرة المثلثية وجدول النسب المثلثية لاقياس شهيرة (تستعمل في حساب الغمدة)

الجدول

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

الدائرة



$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases}$$

نجد:

$$\begin{cases} \theta = \arg(z) = \alpha + 2k\pi \\ \theta = \arg(z) = \pi - \alpha + 2k\pi \\ \theta = \arg(z) = \pi + \alpha + 2k\pi \\ \theta = \arg(z) = -\alpha + 2k\pi \end{cases} ; (k \in \mathbb{Z} \text{ حيث})$$

صورة z تقع في **الرّبع** ...؛ حسب إشارة $\frac{x}{r}$ و $\frac{y}{r}$. وبدون إشارة **نجد:** $\alpha = \cdots$.

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك

0699 320 999 / 044 77 64 11

منصة دروسكم - دعم مدرسي عبر الأنترنت - www.dorouscom.com

التمرين-2-:

$Z_1 = 1 + i$	$Z_2 = 1 - i\sqrt{3}$	$z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$	$Z_4 = -2 + 2i$
$Z_5 = i\sqrt{2}$	$Z_1 \times Z_2$	$\frac{Z_1}{Z_2}$	Z_2^3

1. عين الطويلة و العمدة لكل من الأعداد المركبة:
2. اكتب على الشكل المثلثي ثم الأسي الأعداد المركبة التالية .
3. اكتب $Z_1 \times Z_2$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيم المضبوطة لـ $\cos\frac{-\pi}{12}$ و $\sin\frac{-\pi}{12}$

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني
ملف الحصة المباشرة و المسجلة
1 حصص مباشرة
2 حصص مسجلة
3 دورات مكثفة
أحصل على بطاقة الإشتراك

0699 320 999 / 044 77 64 11