

الدوال الأصلية و الحساب التكاملي

الدوال الأصلية
الحسابات
معدلات التفاضلية
لكن الأرباح
أولاً الأرباح الأصلية
أبي و سارة

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني

ملف الحصة المباشرة و المسجلة

1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



ملف الحصة المباشرة و المسجلة

1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



استفاد

تتضمن

إذا أتت إلى هنا يمكننا طردنا من هنا
نقول أنك من غير الله آمين
تتضمن

الدوال الاصلية

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I .
نقول ان دالة F هي دالة اصلية للدالة f على المجال I اذا تحقق الشرطان

■ F قابلة للاشتقاق على المجال I

■ $F'(x) = f(x)$

$$F'(x) = f(x)$$

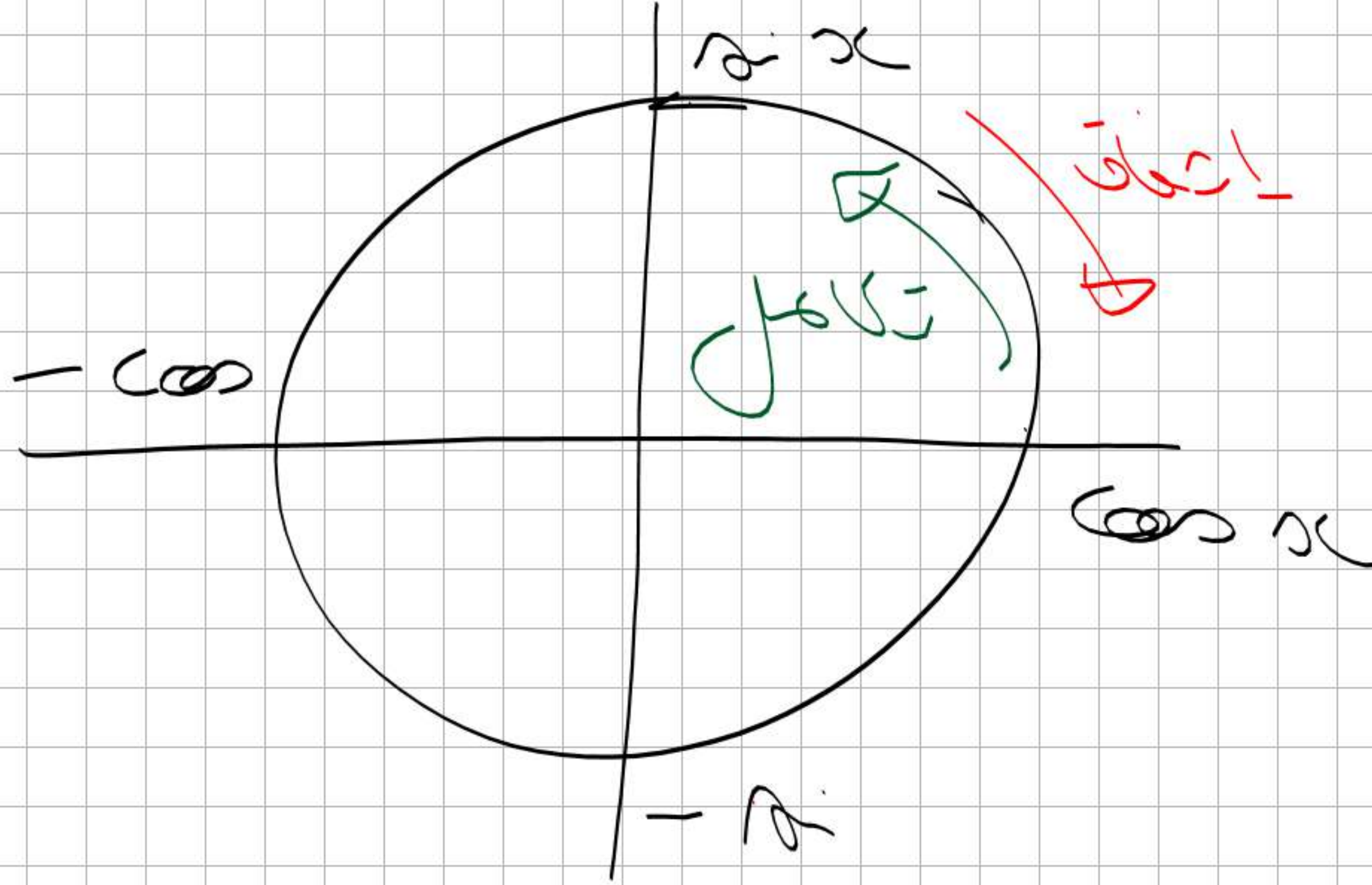
$$F(x) = x^2$$

$$f(x) = 2x$$

دالة اصلية لـ $2x$

أحصل على بطاقة الإشتراك





ملف الحصة المباشرة و المسجلة

1 حصص مباشرة

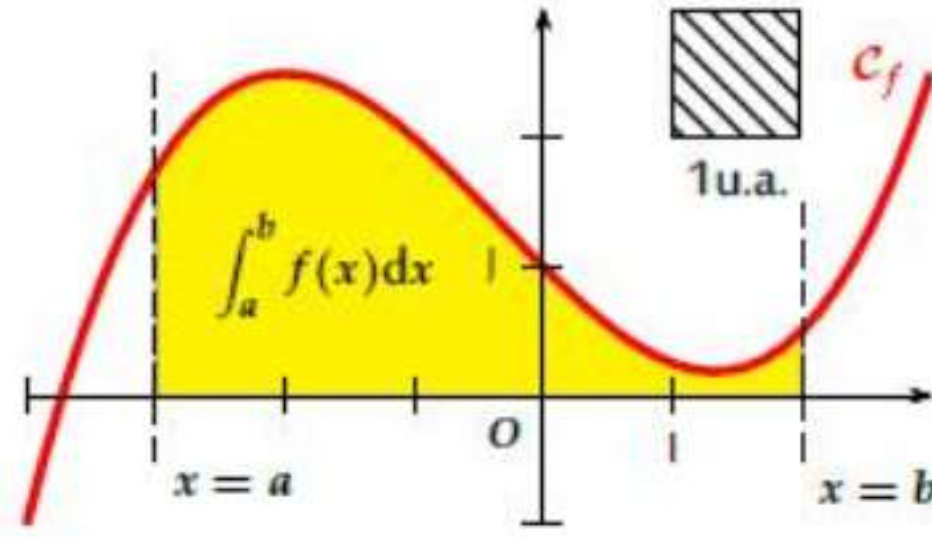
2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



الدالة الاصلية و مساحة حيز تحت منحن



- دالة مستمرة و موجبة تماما على مجال I . a و b عدنان حقيقيان من I حيث $a \leq b$. (C_f) منحنى f في معلم متعامد و متجانس و دالة اصلية لـ f على I . مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و بالمستقيمت التي معادلاتها $x = a$ و $x = b$ و $y = 0$ هو العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)dx$
- وحدة المساحة هي مساحة المستطيل ذو الضلعين OI و OJ
- اذا كانت f سالبة فان مساحة الحيز هي $-\int_a^b f(x)dx$

دالة
المنحنى الاصلية

$$x = a$$

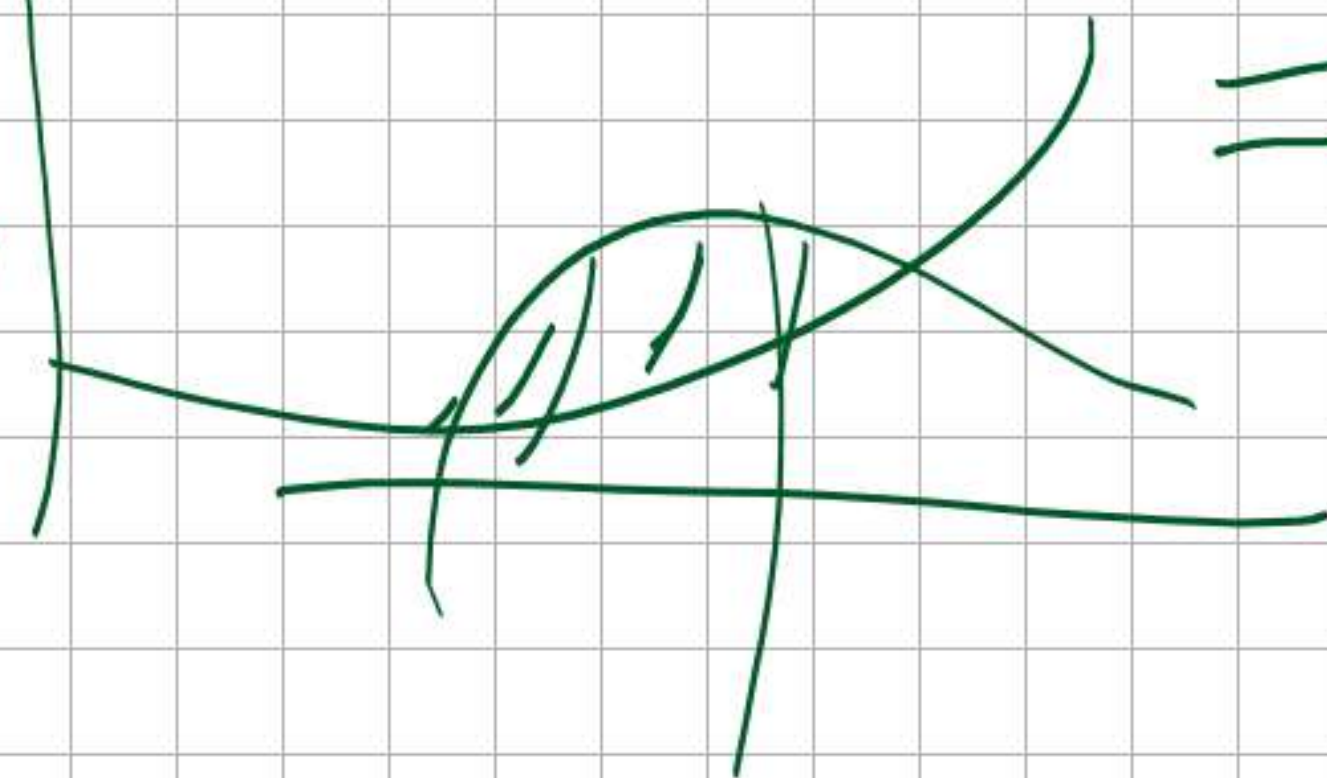
$$x = b$$

$$y = 0$$

وسنرى ان الحيز

$$\int_a^b f(x) dx = \text{مساحة الحيز الاكبر}$$

$$= F(b) - F(a)$$



1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

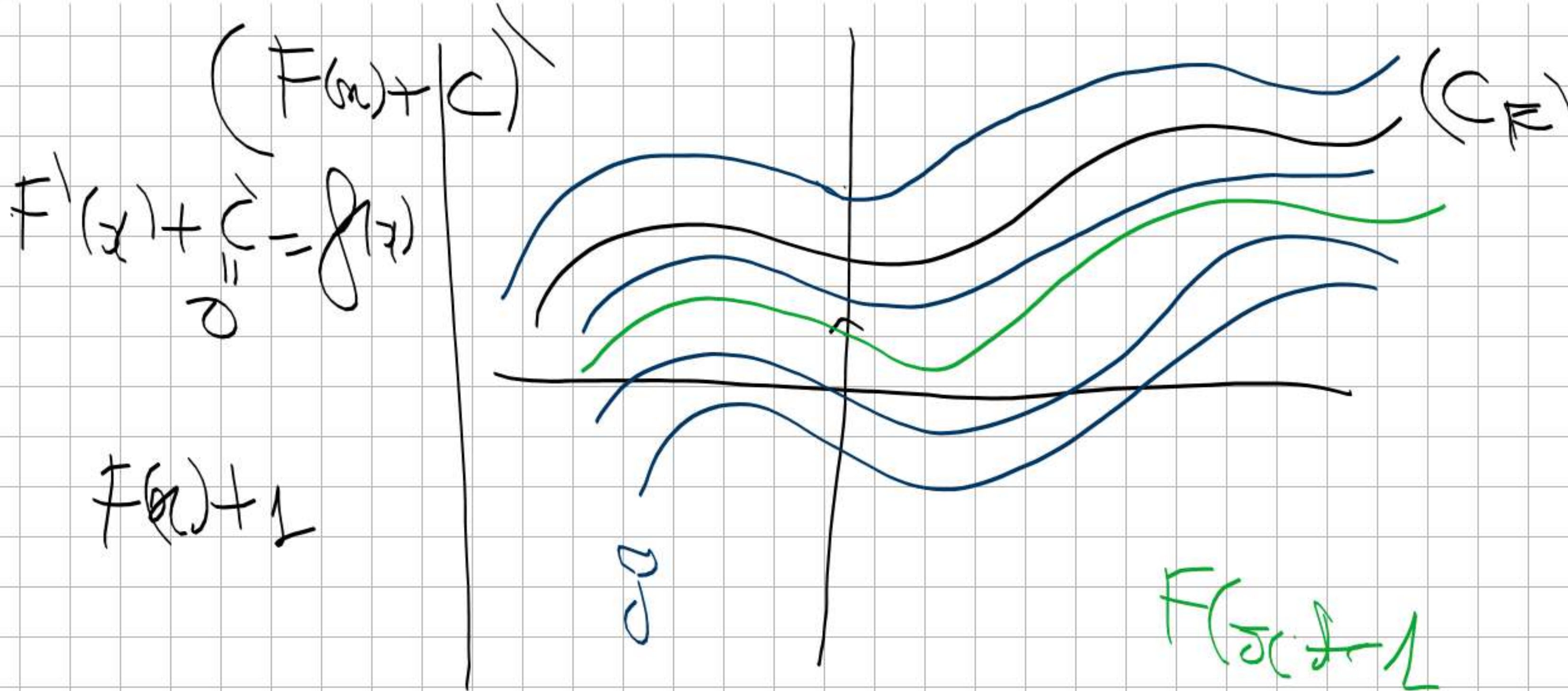
أحصل على بطاقة الإشتراك



خواص

كل دالة مستمرة على مجال I تقبل دوال اصليّة على I

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I
 اذا كانت F دالة اصليّة للدالة f على المجال I فان:
 جميع الدوال الاصليّة للدالة f معرفة على I بما يلي: $(c \in \mathbb{R}) x \mapsto F(x) + c$



ملف الحصة المباشرة و المسجلة

1 حصص مباشرة

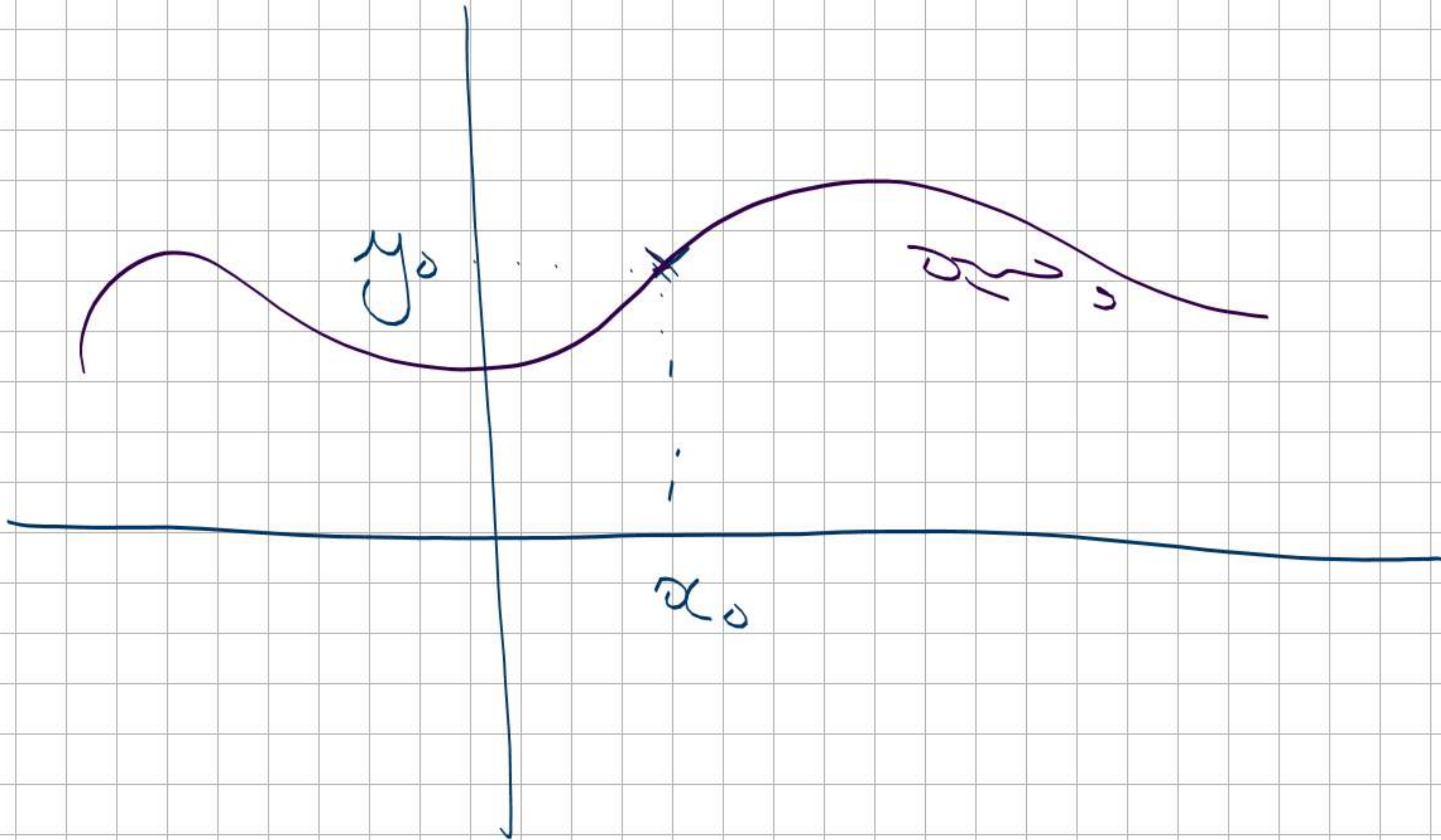
2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



كل دالة f مستمرة على مجال I . x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كفي. توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0) = y_0$ تقبل دوال أصلية على I



1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



دوال اصليّة لـ $f + g$ و kf ا-ى مل وصى

- اذا كانت F و G دالتين اصليتين على الترتيب لـ f و g على مجال I فان $F + G$ دالة اصليّة لـ $f + g$ على I
- اذا كانت F دالة اصليّة للدالة f على مجال I فان kF دالة اصليّة للدالة kf على I ($k \in \mathbb{R}$)

① $\int f(x) dx = F$ $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
 $\Rightarrow F + G$

② $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx = kF$



التمرين الأول:

بين أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f علي I في كل حالة

$$1) F(x) = 4x^2 - 3x + 4; f(x) = 8x - 3; I = \mathbb{R}$$

$$2) F(x) = 12x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x + 10; f(x) = 36x^2 - 3x - 1; I = \mathbb{R}$$

$$3) F(x) = \frac{12}{x^2}; f(x) = \frac{-24}{x^3}; I =]0; +\infty[$$

$$4) F(x) = \frac{x-2}{x+3}; f(x) = \frac{5}{x^2 + 6x + 9}; I =]-3; +\infty[$$

$$5) F(x) = \frac{x-1}{x+1} - 2x; f(x) = -\frac{2x^2 + 4x}{x^2 + 2x + 1}; I =]-1; +\infty[$$

$$\textcircled{1} \quad \underline{F \text{ دالة أصلية لـ } f \text{ علي } I}$$

$$F'(x) = 8x - 3 = f(x)$$

$$\textcircled{2} \quad \underline{F \text{ دالة أصلية لـ } f \text{ علي } I}$$

$$F'(x) = 12 \times 3x^2 - \frac{3}{2} \times 2x - 1$$

$$= 36x^2 - 3x - 1$$

$$= f(x)$$

$$\underline{F \text{ دالة أصلية لـ } f \text{ علي } I}$$



$$\textcircled{3} \quad F'(x) = \frac{-12 \times 2x}{x^4}$$

$$F(x) = \frac{12}{x^2}$$

$$= \frac{-24}{x^3} = f(x)$$

$$\textcircled{4} \quad F'(x) = \frac{(x-2)'(x+3) - (x+3)'(x-2)}{(x+3)^2} \quad F(x) = \frac{x-2}{x+3}$$

$$= \frac{\cancel{x}+3 - \cancel{x}+2}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{5}{(x+3)^2} = \frac{5}{x^2 + 6x + 9} = f(x)$$

ف 5 أم 2 ف 2

1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



5) $F(x) = \frac{x-1}{x+2}$ - لعل

$$F'(x) = \frac{x+2 - x+1}{(x+2)^2} - 2$$

$$= \frac{2 - 2(x+2)^2}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2 - 2(x^2 + 4x + 4)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2 - 2x^2 - 8x - 8}{(x+2)^2} = \frac{-2x^2 - 4x - 6}{(x+2)^2}$$

1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



$$F(x) = \frac{2x^2 + 4x}{x^2 + 2x + 1}$$

هنا F دالة أصلية لـ f .

1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك





التمرين الثاني:

نعتبر الدالة $f(x) = x - 1; I = \mathbb{R}$

- أوجد جميع الدوال الأصلية F للدالة f .
- أوجد الدالة الأصلية F_1 للدالة f حيث $F_1(2) = 3$.
- أوجد الدالة الأصلية F_2 للدالة f حيث $F_2(0) = 0$.

① إيجاد جميع الدوال الأصلية F للدالة f .

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int (x - 1) dx \\ &= \int x dx - \int 1 dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 + C_1 - x + C_2 \end{aligned}$$

$$\int (x-1) dx = \frac{1}{2} x^2 - x + C$$

جميع الأمال الأصلية لي

$$F(x) = \frac{1}{2} x^2 - x + C$$

حيث $C \in \mathbb{R}$

⑤ ليحساب F_1 آلة أصلية لي حيث $F_1(x) = 3$

$$F_1(x) = \frac{1}{2} x^2 - x + C_1 \quad \text{و } F_1(2) = 3$$

$$\cancel{\frac{1}{2} \times 2^2 - 2 + C_1 = 3} \quad \text{أو } C_1 = 3$$

$$F_1(x) = \frac{1}{2} x^2 - x + 3$$



إيجاد الدالة $F_2(x) = 0$

نضع $F_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + c_2 = 0$ $F_2(0) = 0$ كما كان

$c_2 = 0$ إذن $\frac{1}{2}x^2 - 0 + c_2 = 0$

$$F_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$$

أحصل على بطاقة الإشتراك



$$F'(x) = (2x-2)(x-2)$$

$$F + C$$

$$\textcircled{1} F + 5 = H$$

$$\textcircled{2} F - 2 = G$$

نعتبر الدالتين $F; G$ حيث

$$F(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x-2}; G(x) = \frac{2x-1}{x-2} + 1, I =]2; +\infty[$$

أثبت بطريقتين مختلفتين أن $F; G$ دالتين أصليتين لنفس الدالة.

$$F' = G \quad \text{طرقاً نبدأ من}$$

$$F - G = C \quad \text{طرقاً نبدأ من}$$

$$H - G = (F + 5) - (F - 2) = F + 5 - F + 2 = 7$$

التمرين الثالث:

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني

ملف الحصة المباشرة و المسجلة

1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



$$F'(x) = \frac{(2x-2)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-2x+3)}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{\cancel{(x-2)}((x-2)(2x-1)) - 2(x^2-2x+3)}{(x-2)^{4-1}}$$

$$= \frac{\cancel{(2x^2-2x-4x+4)} - \cancel{2x^2+4x-6}}{(x-2)^3}$$

$$= \frac{-2x-2}{(x-2)^3}$$

1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



$$F(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-2)^2}; G(x) = \frac{2x-1}{(x-2)^2} + I =]2; +\infty[$$

$$G'(x) = \frac{2(x-2)^2 - 2(x-2)(2x-1)}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{\cancel{(x-2)}(2x-4 - 4x+8)}{(x-2)^3}$$

$$= \frac{-2x-2}{(x-2)^3}$$

$$=$$

1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



الدوال الاصلية لدوال مالوفة

تم الحصول على النتائج الملخصة في الجدول الموالي انطلاقا من قراءة عكسية لمشتقات دوال مالوفة.
الدوال الاصلية للدالة f على المجال I هي الدوال F . يمثل c عددا حقيقيا كيفيا

$f(x) =$	$F(x) =$	$I =$
a (عدد حقيقي)	$ax + c$	\mathbb{R}
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$	\mathbb{R}
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$]0; +\infty[$ او $]-\infty; 0[$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N}$)	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]0; +\infty[$ او $]-\infty; 0[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
e^x	$e^x + c$	\mathbb{R}
e^{ax+b} ($b \in \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R}^*$)	$\frac{1}{a}e^{ax+b} + c$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$	$]0; +\infty[$
$\ln(x-a)$ ($a \in \mathbb{R}$)	$(x-a)\ln(x-a) - x + c$	$]a; +\infty[$

$$\int x^3 = \frac{1}{4}x^4$$

$$\int dx = x + c$$

$$\int x^2 = \frac{1}{3}x^3$$

$$\int x^1 = \frac{1}{2}x^2$$

$$\int \frac{1}{x^n} = \frac{1}{n-1}x^{n-1}$$



الدوال الاصلية و العمليات على الدوال

« دالة قابلة للاشتقاق على مجال I »

الدالة f	الدوال الاصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$(n \in \mathbb{N}^*) u' u^n$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$	
$(n \geq 2 \text{ و } n \in \mathbb{N}) \frac{u'}{u^n}$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + c$	من اجل كل x من I ، $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	من اجل كل x من I ، $u(x) > 0$
$u' e^u$	$e^u + c$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + c$	$u(x) \neq 0$
$u' \cos u$	$\sin u$	
<u>$u' \sin u$</u>	$-\cos u$	

$$\int \frac{u'}{u^n} = \frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$$

$$\int u' u^n \cos u = \frac{1}{n+1} u^{n+1} \cos u + \ln |u|$$

ملف الحصة المباشرة و المسجلة

1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



$$\int x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

التمرين الرابع:

عين دالة أصلية F للدالة f على I في كل حالة:

$$\textcircled{1} f(x) = 2x + 2$$

$$\int (2x + 2) dx = \int 2x dx + \int 2 dx$$

$$= 2 \int x dx + \int 2 dx$$

$$= 2x \frac{x^{1+1}}{1+1} + 2x + C$$

$$= x^2 + 2x + C$$

$$1) f(x) = 2x + 1; I = \mathbb{R}$$

$$2) f(x) = 3x^3 + 3x - 4; I = \mathbb{R}$$

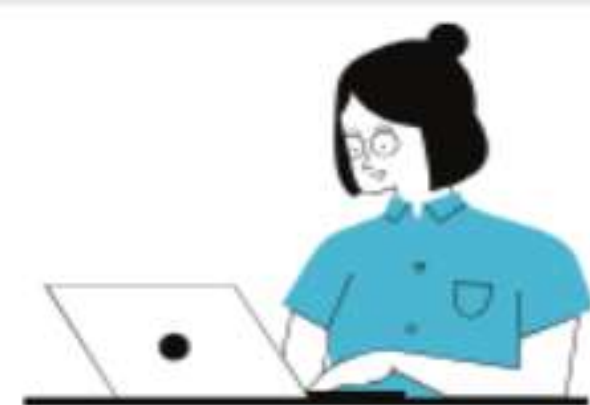
$$3) f(x) = 2x^4 - 5x^2 + 1; I = \mathbb{R}$$

$$4) f(x) = \cos(x); I = \mathbb{R}$$

$$5) f(x) = \sin(x) + 2x; I = \mathbb{R}$$

$$6) f(x) = 2 \sin(2x) + \frac{1}{\sqrt{x}}; I =]0; +\infty[$$

$$7) f(x) = \sin(x) + 2x; I = \mathbb{R}$$



$$③ \quad f(x) = 3x^3 + 3x - 4,$$

$$\int f dx = \int 3x^3 dx + \int 3x dx - \int 4 dx$$

$$= 3 \times \frac{1}{4} x^4 + 3 \times \frac{1}{2} x^2 - 4x + C$$

$$= \frac{3}{4} x^4 + \frac{3}{2} x^2 - 4x + C$$

$$⑤ \quad f(x) = \cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$



$$\textcircled{6} f(x) = (2x + 1) + 2x$$

$$\int (2x + 1) dx = \int 2x dx + \int 1 dx$$

$$= x^2 + x + C$$

$$\textcircled{7} f(x) = 2x(2x) + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\int f(x) dx = \int (2x(2x) + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx$$



حصص مباشرة

1

حصص مسجلة

2

دورات مكثفة

3

أحصل على بطاقة الإشتراك



$$= \int 2\cos(2x) dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int \cos(u)$$

$$u(x) = 2x$$

$$F(x) = \cos(2x) + 2\sqrt{x} + C$$

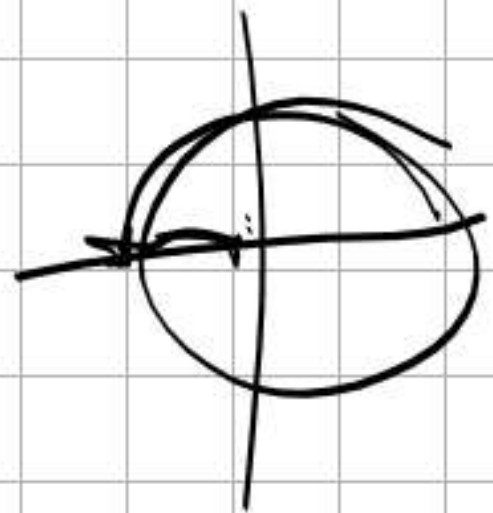
① جميع ادخال الاكاديمية درج 8

$$F = \int f dx$$

$$F(x) = \int (2x + \cos x) dx$$

$$F(x) = x^2 + \sin x + C$$

$$\pi^2 + \sin \pi + C = -1 \rightarrow F_1(\pi) = -1$$



$$\pi^2 + C = -1$$

$$C = -1 - \pi^2$$

التمرين الخامس:

نعتبر الدالة $f(x) = 2x + \cos(x); I = \mathbb{R}$

(1) أوجد جميع الدوال الأصلية F للدالة f .

(2) أوجد الدالة الأصلية F_1 للدالة f حيث

$$F(\pi) = -1$$





التمرين السادس :

عين دالة أصلية F للدالة f على I في كل حالة:

$$1) f(x) = 4(x+1)(x+1)^3; I = \mathbb{R}$$

$$2) f(x) = (x+1)(x^2 + 2x + 5)^2; I = \mathbb{R}$$

$$3) f(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}; I =]0; +\infty[$$

$$4) f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 1}}; I = \mathbb{R}$$

$$\textcircled{1} \int (x+1) dx =$$

$$= \int 4(x+1)(x+1)^3 dx$$

$$= 4 \int (x+1)^4 dx$$

$$u(x) = x+1$$

$$u'(x) = 1$$

$$\int f(x) dx = 4 \times \frac{1}{5} (x+1)^5 = \frac{4}{5} (x+1)^5$$

$$\int u^n dx = \frac{1}{n+1} u^{n+1}$$

$$f(x) = (x+1)(x^2+7x+5)^2$$

$$\int f(x) dx = \int \underbrace{(x+1)}_{u'} \cdot \underbrace{(x^2+7x+5)^2}_{u^2} dx$$

$$u(x) = x^2 + 7x + 5$$

$$u'(x) = 2x + 7$$

$$\int u' u^2$$

$$u(x) \\ u'(x)$$

$$\int f(x) dx = \frac{1}{6} \int \frac{2(x+1)(x^2+7x+5)^2}{2x+7} dx \\ = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} u^3 \quad u^2 = \frac{1}{6} (x^2+7x+5)^3$$



$$\int f(x) dx = \int \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}} dx$$

$$2) f(x) = (x+1)(x^2 + 2x + 5)^2; I = \mathbb{R}$$

$$3) f(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}; I =]0; +\infty[$$

$$4) f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 1}}; I = \mathbb{R}$$

$$\int \frac{u}{\sqrt{u}} dx = 2\sqrt{u} + C$$

ضع $u(x) = 3x^2$ ، $u(x) = \sqrt[3]{x}$

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \int \frac{u}{\sqrt{u}} dx = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{u} + C = \sqrt{2x^3} + C$$

1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



ملف الحصة المباشرة و المسجلة

1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



$$\left(\frac{1}{x} \right)^2 = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$u' = 2x \quad , \quad u = x^2 + 1 \quad \text{ضع}$$

$$\int f(x) dx = 3 \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$= 3 \int \frac{u'}{\sqrt{u}} dx = 3 \int \frac{1}{\sqrt{u}} du$$



$$F(x) = \frac{3}{2} + 2\sqrt{x^2 + 2} + C$$

Handwritten work showing the integration of $\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ using trigonometric substitution. The steps are:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} dx$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{2(\frac{x^2}{2} + 1)}} dx$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{x^2}{2} + 1}} dx$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{2} + 1}} dx$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{2} + 1}} dx$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} du$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln|u + \sqrt{u^2 + 1}| + C$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln|\frac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{x^2}{2} + 1}| + C$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln|\frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{2}}| + C$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln|x + \sqrt{x^2 + 2}| - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|\sqrt{2}| + C$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln|x + \sqrt{x^2 + 2}| - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln 2 + C$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln|x + \sqrt{x^2 + 2}| + C$$

دروسكم
منصة التعليم الإلكتروني



ملف الحصة المباشرة و المسجلة

1 حصص مباشرة

1

2 حصص مسجلة

2

3 دورات مكثفة

3

أحصل على بطاقة الإشتراك



التمرين السابع:

$$\text{نعتبر الدالة } f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 4}{(x-2)^2}; I =]2; +\infty[$$

(1) عين الأعداد الحقيقية $a; b; c$ حتى تكون

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2} \text{ من أجل كل } x \in I$$

(2) أوجد دالة F دالة أصلية للدالة f و تحقق

$$F(3) = -1$$

