البرهان بالتراجع: نريد أن نبرهن خاصية P صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ (أو من أجل كل $n \geq n_0$) نتبع الخطوات:

أولا: نتحقق من صحة الخاصية P من أجل $n=0$ $(n=n_0 , 1)$

ثانيا: نفرض أن الخاصية محققة من أجل n

ونبرهن أن الخاصية محققة من أجل $n+1$

أخيرا: نستنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ الخاصية محققة

$0 \longrightarrow 1$ $\qquad$ 0 ✓

$1 \longrightarrow 2$ $\qquad$ $n \longrightarrow n+1$

$2 \longrightarrow 3$

مثال: برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \geq 1$

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

أولا: من أجل $n=1$ الطرف الأيسر 1

الطرف الأيمن $1 = \frac{2}{2} = \frac{1(1+1)}{2}$

الخاصية محققة.

ثانيا: نفرض أن الخاصية محققة من أجل n

أي نفرض أن $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

ونبين أن الخاصية محققة من أجل $n+1$

أي نبين أن $\underbrace{1+2+\cdots+n}+n+1=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

لدينا: $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ (فرض التراجع)

نضيف $n+1$ للطرفين

$$1+2+\cdots+n+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+1)2}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

نستنتج: من أجل كل n - طبيعي $n \geq 1$

فإن $1+2+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

دراسة متتالية تراجعية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. دراسة مثال: نريد دراسة المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$$

x	0	2
y	3	2

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3$$

1) باستعمال مجدول ، نحسب الحدود الأولى للمتتالية (u_n).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Un	0	3	1,5	2,25	1,875	2,0625	1,96875	2,015625	1,992188	2,0039063	1,9980469	2,000977	1,999512	2,000244

ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وحول تقاربها .

2) لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.

أرسم (Δ) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

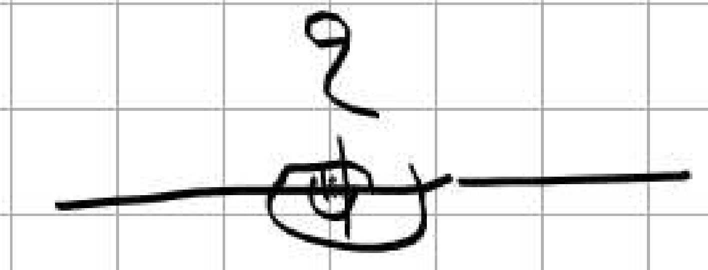
أرسم المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$.

ضع على محور الفواصل u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 . هل تخميناتك تبدو صحيحة ؟

3) أحسب العدد α فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (D).

نضع $v_n = u_n - \alpha$. أثبت أن (v_n) متتالية هندسية .

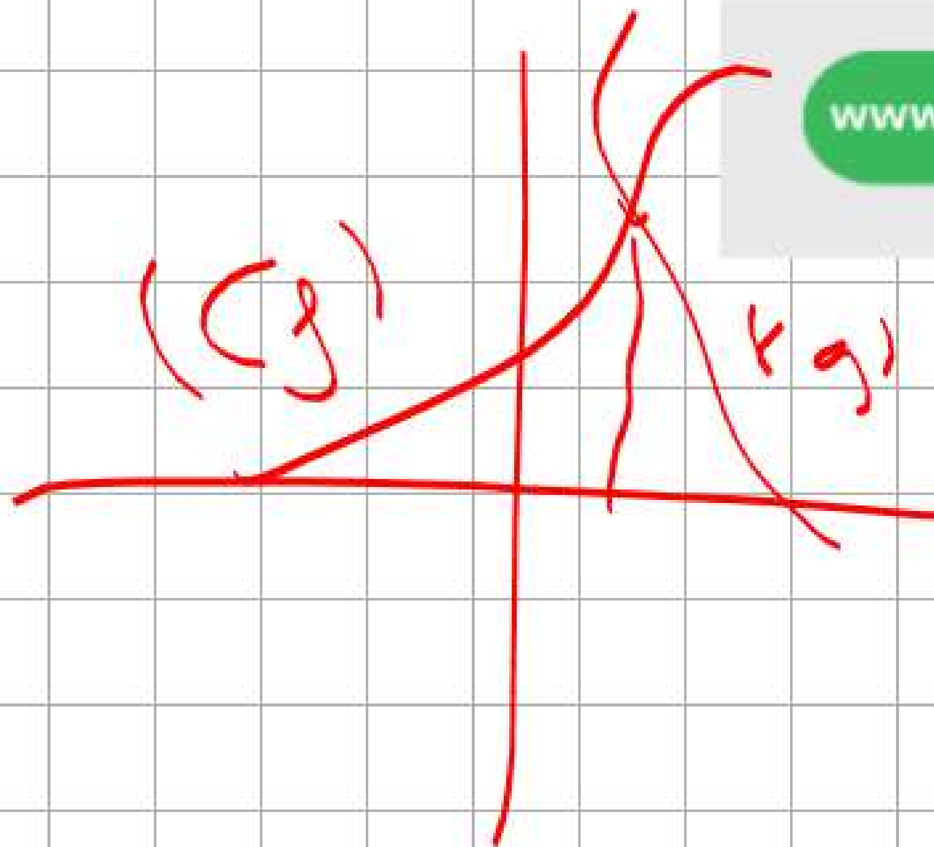
عين نهاية (v_n) ونهاية (u_n) .



التخمين : المتتالية غير رتيبة .

متقاربة نحو 2

(D)
$M_1 = f(M_0)$
$M_2 = f(M_1)$
$M_3 = f(M_2)$
$M_4 = f(M_3)$
(Δ)
2
M_0
1
M_2
M_4
M_3
M_1



فاصلة نقطة التقاطع: $f(x) = g(x)$

$$x = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$x + \frac{1}{2}x = 3$$

$$\frac{3}{2}x = 3$$

$$\frac{1}{2}x = 1$$

$$x = 2$$

فاصلة نقطة التقاطع 2

$\alpha = 2$

$V_0 = u_0 - 2 = -2$

$V_n = U_n - 2$

نبين أن (V_n) هندسية

$q(u_n - 2)$

$V_{n+1} = q V_n$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 2$$
$$= -\frac{1}{2} U_n + 3 - 2$$
$$= -\frac{1}{2} U_n + 1$$
$$= -\frac{1}{2}\left(U_n + \frac{1 \times 2}{-1}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}(\underbrace{U_n - 2}_{V_n}) = -\frac{1}{2} V_n$$

1- اذن (V_n) هندسية أساسها $-\frac{1}{2}$

كتابة V_n بدلالة n

$$V_n = V_0 \times q^n$$

$$= -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

نستنتج عبارة U_n بدلالة n :

لدينا $V_n = U_n - 2$ ومنه $U_n = V_n + 2$

$$\boxed{U_n = -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2}$$

النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2 = 2$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$V_{n+1} = q V_n$

مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية (V_n) هندسية أساسها $q \neq 1$ وحدها الأول V_0.

$$S = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n = V_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

أو

$$= V_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$$

عدد الحدود $n+1$

برهان

$$(1-q)S = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n - q(V_0 + V_1 + \cdots + V_n)$$

$$= V_0 + \cancel{V_1} + \cancel{V_2} + \cdots + \cancel{V_n} - (\cancel{qV_0} + \cancel{qV_1} + \cancel{qV_2} + \cdots + qV_n)$$

$$= V_0 - V_{n+1}$$

$$V_{n+1} = V_0 \times q^{n+1}$$

$$(1-q)S = V_0 - V_{n+1}$$

$$S = \frac{V_0 - V_{n+1}}{1-q}$$

$$= \frac{V_0 - V_0 q^{n+1}}{1-q}$$

$$= V_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

أو

$$= V_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$$

الوسط الحسابي:

a, b, c ثلاث حدود متتالية لمتتالية حسابية فإن

$$a, b, c$$

$$a + c = 2b$$

مثال ①

$$u_1, u_2, u_3$$

$$u_1 + u_3 = 2u_2$$

مثال ②

$$u_p, u_{p+1}, u_{p+2}$$

$$u_p + u_{p+2} = 2u_{p+1}$$

الوسط الهندسي:

a, b, c ثلاث حدود متتالية لمتتالية هندسية فإن:

$$a, b, c$$

$$a \times c = b^2$$

مثال ①

$$u_5, u_6, u_7$$

$$u_5 \times u_7 = u_6^2$$

مثال ②

$$u_k, u_{k+1}, u_{k+2}$$

$$u_k \times u_{k+2} = u_{k+1}^2$$

بكالوريا شعبة علوم 2023 –الموضوع الثاني–

(u_n) المتتالية المعرفة بـ : $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + 1$.

1) أ ـ برهن بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 5$.

ب ـ بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

2) نضع : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 5$.

$u_n = v_n + 5$

أ ـ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{4}{5}$ ، يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

ب ـ أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = -5\left(\frac{4}{5}\right)^n + 5$.

جـ ـ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) نضع : من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

أحسب S_n بدلالة n ثم بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $T_n = 5n - 20\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$.

٢) نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن $u_n<5$

أولا: من أجل $n=0$: $u_0=0<5$ محققة.

ثانيا: نفرض أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$ $u_n<5$ ونبين أن $u_{n+1}<5$

لدينا $u_n<5$

نضرب في $\frac{4}{5}$: $\frac{4}{5}u_n<\cancel{5}\times\frac{4}{\cancel{5}}$

نضيف ١: $\underbrace{\frac{4}{5}u_n+1}_{u_{n+1}}<5$

ومنه $u_{n+1}<5$

نتيجة: ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن $u_n<5$

ب) نبين أن (U_n) متزايدة تماما

$$U_{n+1} - U_n = \frac{4}{5}U_n + 1 - U_n$$

$$= \left(\frac{4}{5} - 1\right)U_n + 1$$

$$= -\frac{1}{5}U_n + 1$$

طريقة الحساب

لدينا $U_n < 5$

$$-\frac{1}{5}U_n > -\frac{1}{5} \times 5$$

$$U_{n+1} - U_n = -\frac{1}{5}U_n + 1 > 0$$

طريقة التحليل

$$\frac{-U_n + 5}{5} = \frac{5 - U_n}{5} > 0$$

لأن $U_n < 5$

ومنه (U_n) متزايدة تماما

$V_n = U_n - 5$ نبين أن (V_n) هندسية أساسها $\frac{4}{5}$

$V_{n+1} = U_{n+1} - 5$

$= \frac{4}{5} U_n + 1 - 5$

$= \frac{4}{5} U_n - 4$

$= \frac{4}{5} \left(U_n - \frac{4 \times 5}{4} \right)$

$= \frac{4}{5} (U_n - 5)$

الخلاصة

$V_{n+1} = \frac{4}{5} V_n$

$V_{n+1} = \frac{4}{5} V_n$

ومنه (V_n) هندسية

أساسها $\frac{4}{5}$

نعوض الأول $V_0 = U_0 - 5$

$= 0 - 5 = -5$

عبارة V_n بدلالة n

$V_n = V_0 \times q^n$

$= -5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$

عبارة U_n بدلالة n:

لدينا $V_n = U_n - 5$

ومنه $U_n = V_n + 5$

إذن

$U_n = -5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + 5$

النهاية

$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} -5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + 5$

$= 5$

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ $\quad 0 < \frac{4}{5} < 1$

$$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$$

مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

$$= V_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$1 - q$

$q - 1$

$$= -5 \times \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}}$$

$$1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$= -5 \times \left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right] \times 5$$

$$= -25\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right]$$

$$T_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= (v_0+5) + (v_1+5) + (v_2+5) + \dots + (v_n+5)$$

$$= \underbrace{v_0+v_1+v_2+\dots+v_n}_{S_n} + \underbrace{5+5+5+\dots+5}_{5(n+1)}$$

$$= \boxed{-25\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right] + (n+1)5}$$

$$= -25\left[\frac{4}{5}\times\frac{5}{4} - \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^n\right] + 5n+5$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} = \left(\frac{4}{5}\right)^n \times \frac{4}{5}$$

$v_n = u_n - 5$

$u_n = v_n + 5$

$u_0 = v_0 + 5$

$u_1 = v_1 + 5$

$u_n = v_n + 5$

$$T_n = -25 \times \frac{4}{5}\left[\frac{5}{4} - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right] + 5n + \dots$$

$$5 = -20 \times \frac{5}{-20}$$

$$= -20\left[\frac{5}{4} - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right] + 5n + \dots$$

$$= -20\left[\frac{5 \times 5}{5 \times 4} + \frac{-5}{20} - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right] + 5n$$

$$= -20\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right] + 5n$$

ب- عبّر عن v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} v_n$ و استنتج أن (u_n) متقاربة.

4) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_0 \times v_1 \times \dots \times v_{n-1} = \left(\frac{14}{3}\right)^{2n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-n}$.

$$2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^n = 2^{1+2+\dots+n}$$

$$= 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

التمرين 32: بكالوريا شعبة علوم 2022 –الموضوع الأول–

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

(Δ) و (D) المستقيمان المعرفان كما يلي : $(D): y = x$ و $(\Delta): y = -\frac{1}{2}x+1$

(u_n) المتتالية العددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = -4$ و $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1$.

1) أنقل الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزا خطوط التمثيل .

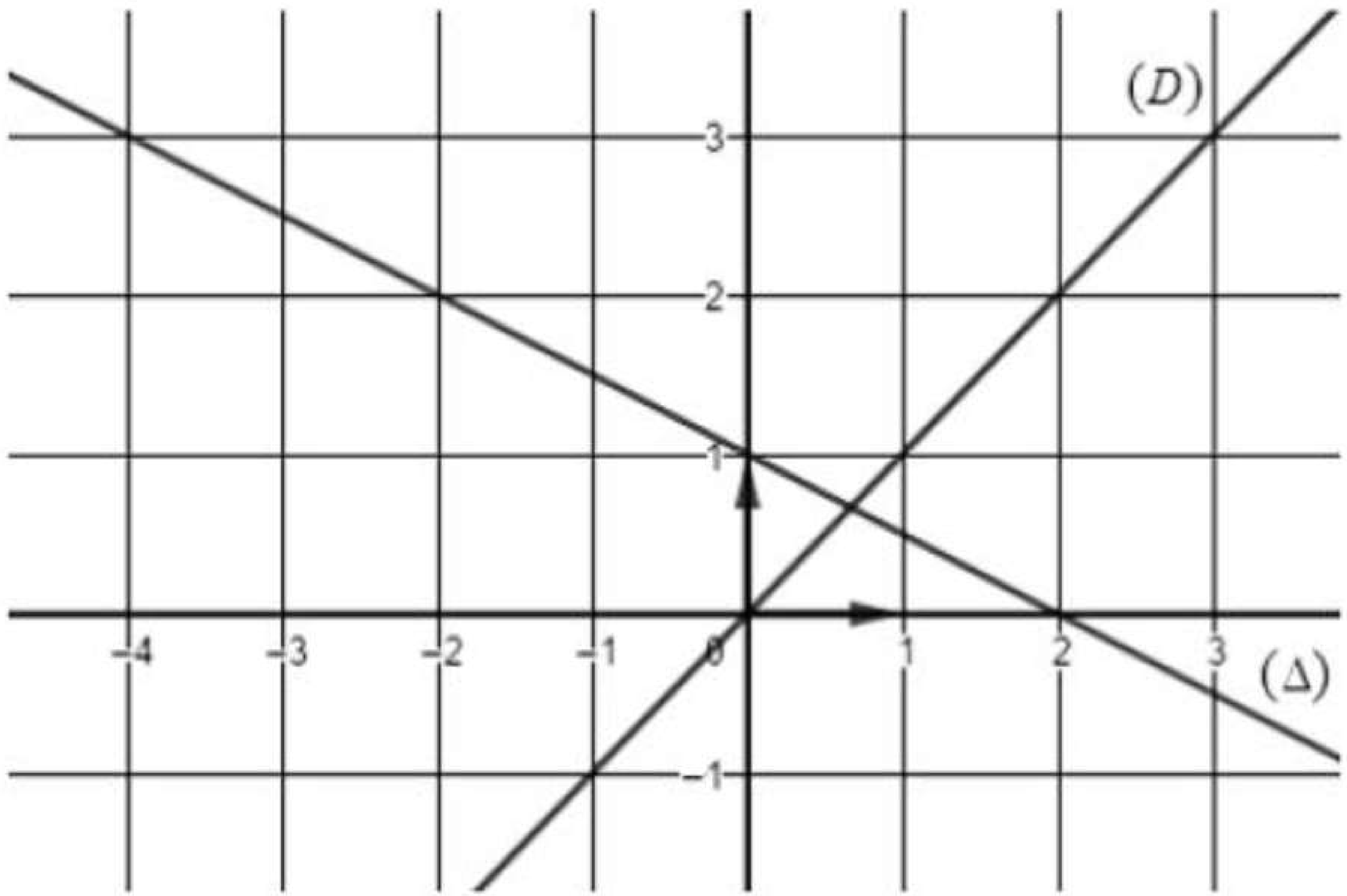
2) أ ـ هل المتتالية (u_n) رتيبة ؟ برّر إجابتك .

ب ـ ضع تخمينا حول تقارب المتتالية (u_n) .

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \left(u_n - \frac{2}{3}\right)^2$.

أ ـ بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ثم أحسب v_0 .

$v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$


(D)
(Δ)
3
2
1
−1
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3

بكالوريا شعبة علوم 2023 –الموضوع الأول–

(u_n) المتتالية المعرفة بـ : $u_0 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = -1 + \frac{2}{2-u_n}$.

1) أ ـ برهن بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$.

ب ـ بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

2) نضع : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$.

أ ـ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ، ثم أكتب عبارة v_n بدلالة n .

ب ـ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{2^n + 1}$ ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3) نضع : من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ و $T_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \ldots + \frac{1}{u_n}$.

أحسب S_n بدلالة n ثم بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $T_n = 2^{n+1} + n$.

3: بكالوريا شعبة علوم 2022 –الموضوع الثاني–

$\begin{cases} u_0 \times u_2 = e^2 \\ \ln(u_1) + \ln(u_7) = - \end{cases}$.

تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $S'_n = \frac{1}{1-e}\left[S_n - (n+1)e^3\right]$.

بـ ـ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = e^{2-n}$.

2) أحسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

3) نعتبر المتتالية العددية المعرفة (v_n) بـ : $v_0 = e^3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = v_n + u_n$.

أ ـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{e^{3-n} - e^4}{1-e}$.

بـ ـ بيّن أن (v_n) متقاربة .

4) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $\frac{1}{e}v_n = \frac{1}{1-e}(u_n - e^3)$.

بـ ـ نعتبر المجموع S'_n حيث : $S'_n = \frac{1}{e}v_0 + \frac{1}{e}v_1 + ... + \frac{1}{e}v_n$.

تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $S'_n = \frac{1}{1-e}\left[S_n - (n+1)e^3\right]$.