المسألة 04:

$\mathbb{R}-\{-1;3\}$

f دالة معرفة على $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;3[\cup]3;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2-2x-3}$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
		$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$	

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم م وم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أ) أحسب نهايات الدالة f على الأطراف المفتوحة لـ D_f.

ب) حدد اتجاه تغير الدالة f على D_f.

جـ) شكل جدول تغيرات الدالة f.

2) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $x=1$ محور تناظر لـ (C_f)

3) عين نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل. ثم أنشئ (C_f).

4) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي λ عدد وإشارة حلول المعادلة: $(\lambda-1)x^2-2(\lambda-1)x-3\lambda=0$

5) باستعمال المنحنى (C_f) اشرح كيف يمكن إنشاء المنحنيات: $(C_g),(C_h),(C_k)$ و (C_L) للدوال g, h, k و L ثم أنشئها حيث:

$$h(x)=\frac{|x^2-2x|}{x^2-2x-3}\ ,\ g(x)=\frac{x^2-2|x|}{x^2-2|x|-3}$$

$$L(x)=|f(x)| \text{ و } k(x)=\frac{x^2-2x}{|x^2-2x-3|}$$

$g(x)=f(|x|)$

$g_1(x)=f(-|x|)$

① النهايات:

$*\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

$*\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

(المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f))

$*\ \lim_{x\to -1^{<}} f(x)=+\infty$ $\quad \frac{3}{0^+}$

$\lim_{x\to-1}(x^2-2x) \to (-1)^2-2(-1)$

$\lim_{x\to-1}(x^2-2x-3) \to 0$

$* \lim\limits_{x \to 3} f(x) = +\infty \qquad \frac{3}{0^+}$

$x=3$ معادلتي مستقيمين مقاربين عموديين
$x=-1$

(لـ C_f)

1) اتجاه التغير على D_f

f معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق على D_f ودالتها المشتقة f' حيث

$* \lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty \qquad \frac{3}{0^-}$

الجواب: (x^2-2x-3)

x يقترب من -1 نعوض في العبارة -1 آخر حد

يقترب من 0 نبحث

$* \lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty \qquad \frac{3}{0^-}$

إشارة $f'(x)$

إشارة $f'(x)$ = إشارة من إشارة

البسط: $-6x+6$

$ax+b$

$-\frac{b}{a}=1$

$-\infty$		$+\infty$
عكس إشارة a	0	إشارة a
+		−

جدول إشارة f'

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$-6x+6$	+	|	+	0	−	|	−
$f'(x)$	+	||	+	0	−	||	−

$(x^2+1)'$

$$f'(x)=\frac{(x^2-2x)'(x^2-2x-3)-(x^2-2x-3)'}{(x^2-2x-3)^2}$$

$$=\frac{(2x-2)(x^2-2x-3)-(2x-2)(x^2-2x)}{(x^2-2x-3)^2}$$

$$=\frac{(2x-2)(\cancel{x^2}-\cancel{2x}-3-\cancel{x^2}+\cancel{2x})}{(x^2-2x-3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-6x+6}{(x^2-2x-3)^2}$$

$(x^2)^2$ موجب

نبين أن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر لـ (C_f)

$$\frac{2+x}{2} = \alpha$$

$$2 = 2\alpha - x$$

$2\alpha - x = 2 - x$

① (D) المستقيم الذي معادلته $x=1$ أي من أجل كل x من D_f فإن $2-x \in D_f$

② نبين أن $f(2-x) = f(x)$

الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;-1[$ و $]-1;1]$

f متناقصة تماما على $[1;3[$ و $]3;+\infty[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
f	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$f(1)=\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

$$f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2-2x-3}$$

حل المعادلة $f(x)=0$

أي $\frac{x^2-2x}{x^2-2x-3}=0$ تكافئ

$x^2-2x-3\neq 0$

$x^2-2x=0$ و $x\neq -1$, $x\neq 3$

$x(x-2)=0$ و $x\in D_f$

أي $x=0$ أو $x=2$

$\frac{A(x)}{B(x)}=0$ تلزم $A(x)=0$ و $B(x)\neq 0$

نقاط التقاطع (C_f) مع (xx')

$$f(2-x)=\frac{(2-x)^2-2(2-x)}{(2-x)^2-2(2-x)-3}$$

$$=\frac{4-4x+x^2-4+2x}{4-4x+x^2-4+2x-3}$$

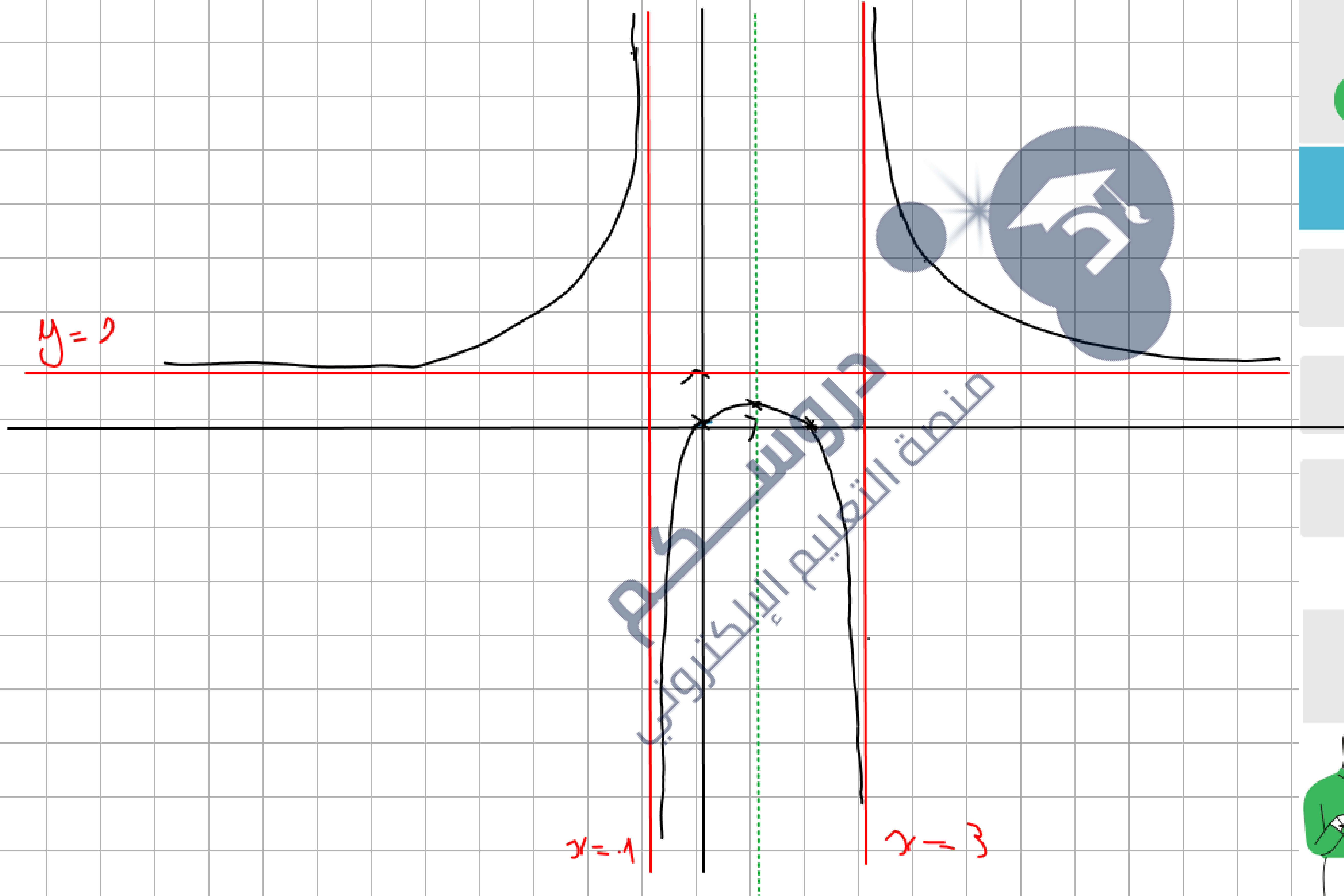
$$=\frac{x^2-2x}{x^2-2x-3}=f(x)$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $x=1$

محور تناظر لـ (C_f)

تعيين نقاط التقاطع مع محور الفواصل

$M_1(0;0)$ و $M_2(2;0)$


y = 1
x = -1
x = 3

ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي λ عدد واشارة حلول المعادلة : $(\lambda-1)x^2-2(\lambda-1)x-3\lambda=0$.

$y=\lambda$

المناقشة

$\lambda x^2 - x^2 - 2\lambda x + 2x - 3\lambda = 0$

$\lambda(x^2-2x-3) = x^2-2x$

$\dfrac{\lambda(x^2-2x-3)}{x^2-2x-3} = \dfrac{x^2-2x}{x^2-2x-3}$

$\lambda = f(x)$

* $\lambda \in]-\infty;0[$ حلين سالب, موجب
* $\lambda = 0$ حلين معدوم و موجب
* $\lambda \in]0;\frac{1}{4}[$ حلان موجبان
* $\lambda = \frac{1}{4}$ حل موجب واحد
* $\lambda \in]\frac{1}{4};1[$ لا توجد حلول
* $\lambda \in]1;+\infty[$ حلين موجب, سالب

حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=\lambda$

للدوال g ، h ، k و L ثم انشئها حيث :

$$g(x)=\frac{x^2-2|x|}{x^2-2|x|-3}\ ,\ h(x)=\frac{|x^2-2x|}{x^2-2x-3}$$

$$k(x)=\frac{x^2-2x}{|x^2-2x-3|}\ \text{و}\ L(x)=|f(x)|\ .$$

$g(x)=f(|x|)$

$|x|^2=x^2$

① $f(x)=f(x)$

$|x|=x$

نزيل الـ

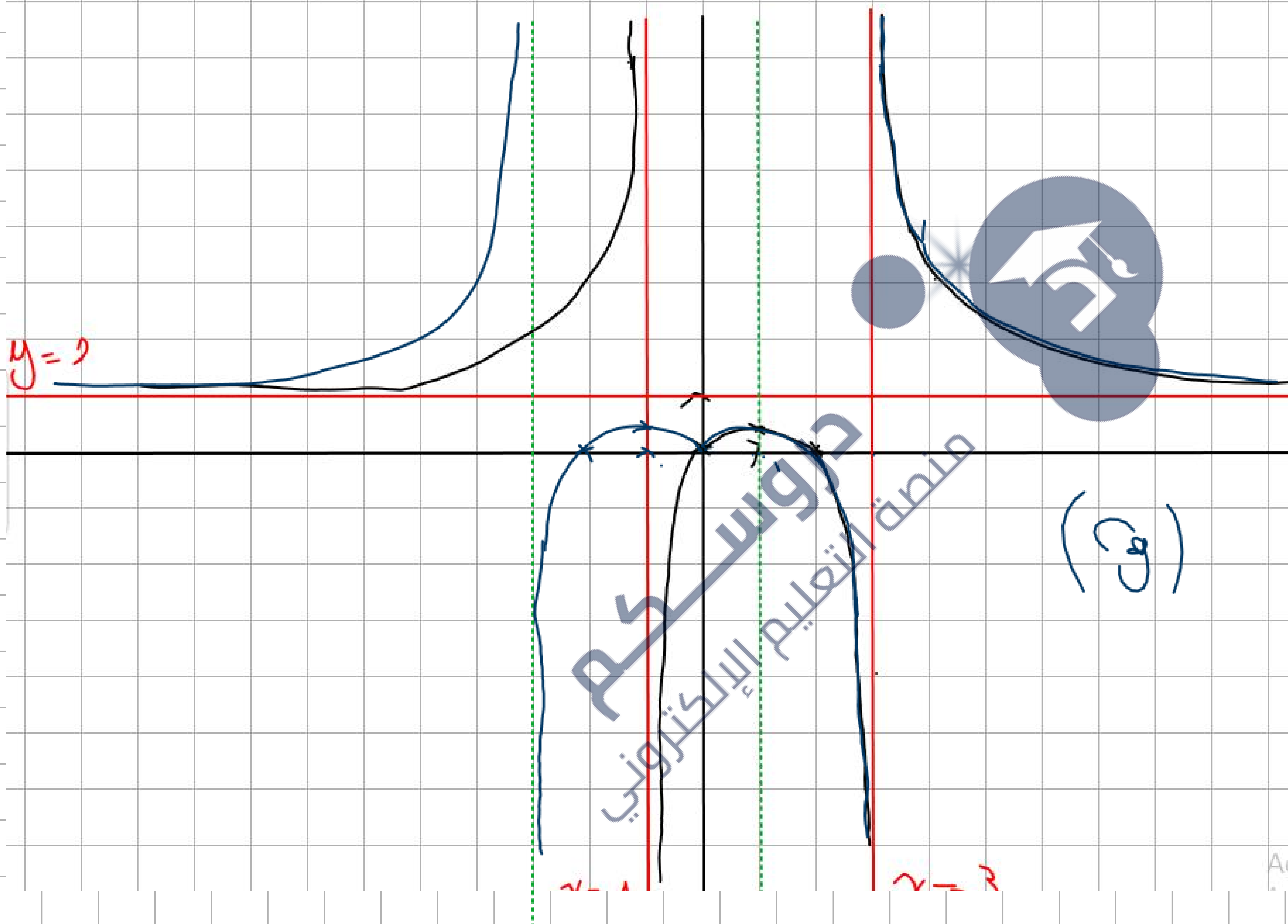
② g دالة زوجية

$g(-x)=g(x)$

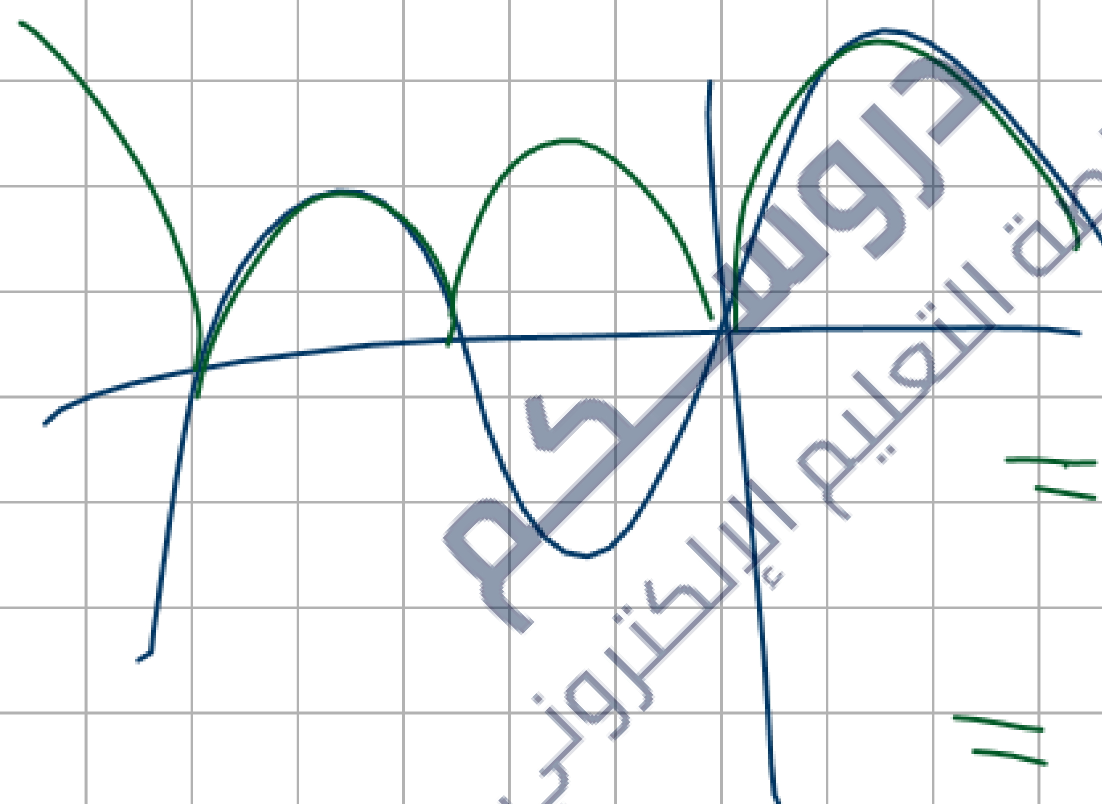
طريقة الانشاء :

(C_g) ينطبق على (C_f) في الجزء $[0,3[\cup]3,+\infty[$ وبما أن g زوجية نأخذ منه المنحنى بالنسبة لمحور التراتيب

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0\\ -x, & x\leq 0\end{cases}$$


y = 1

$$h(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) \leq 0 \end{cases}$$



$$|x^2 - 2x| = -(x^2 \ldots$$

$$= -f(x)$$

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=2x^3-3x^2-1$$

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α مع $\alpha\in[1;2]$

3) عين حصرا للعدد الحقيقي α سعته 10^{-1} .

4) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3+1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في م م ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب النهايات عند أطراف مجال التعريف .

2) أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) بين أن $f(\alpha)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2+1}$

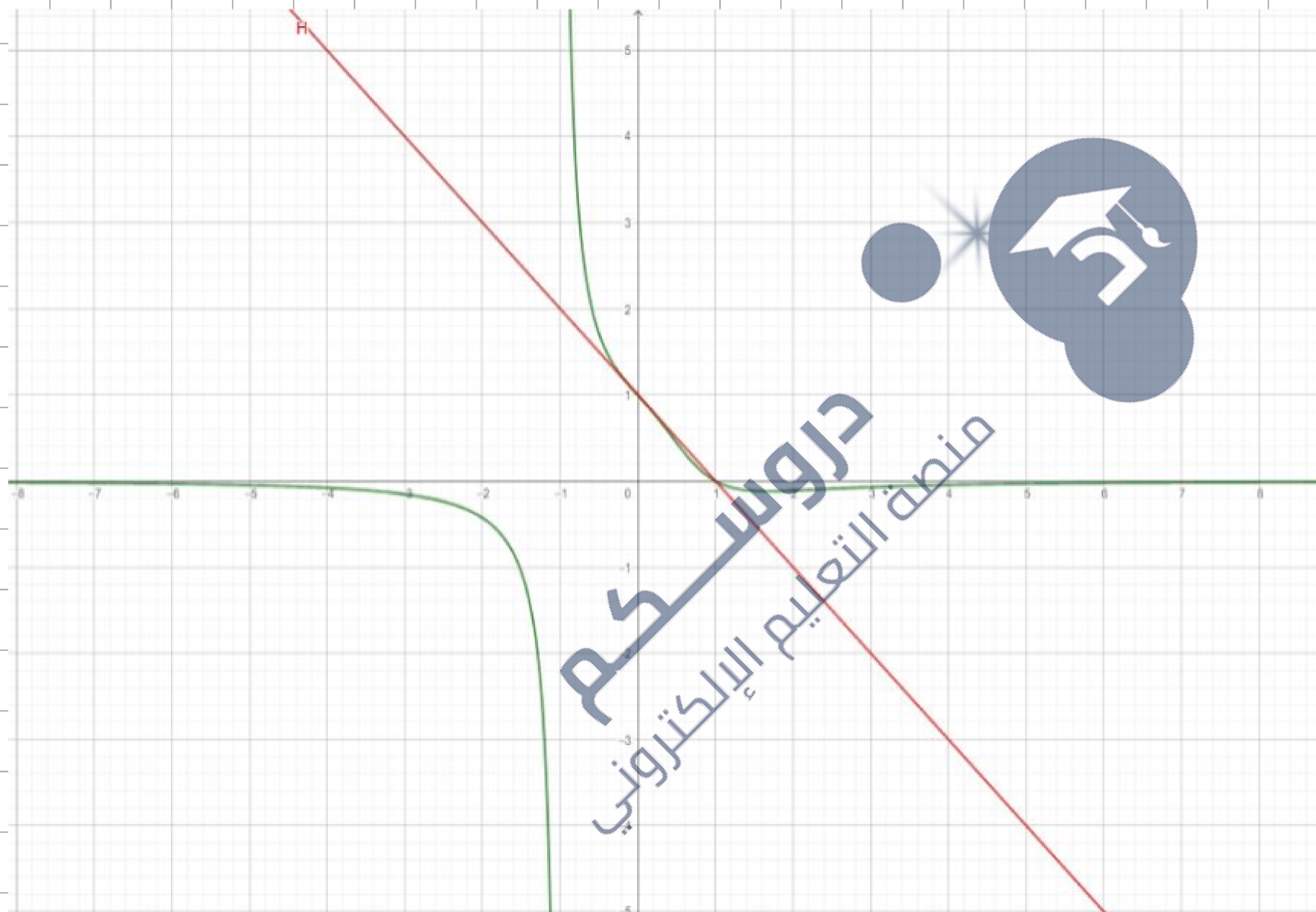
ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} .

4) أكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

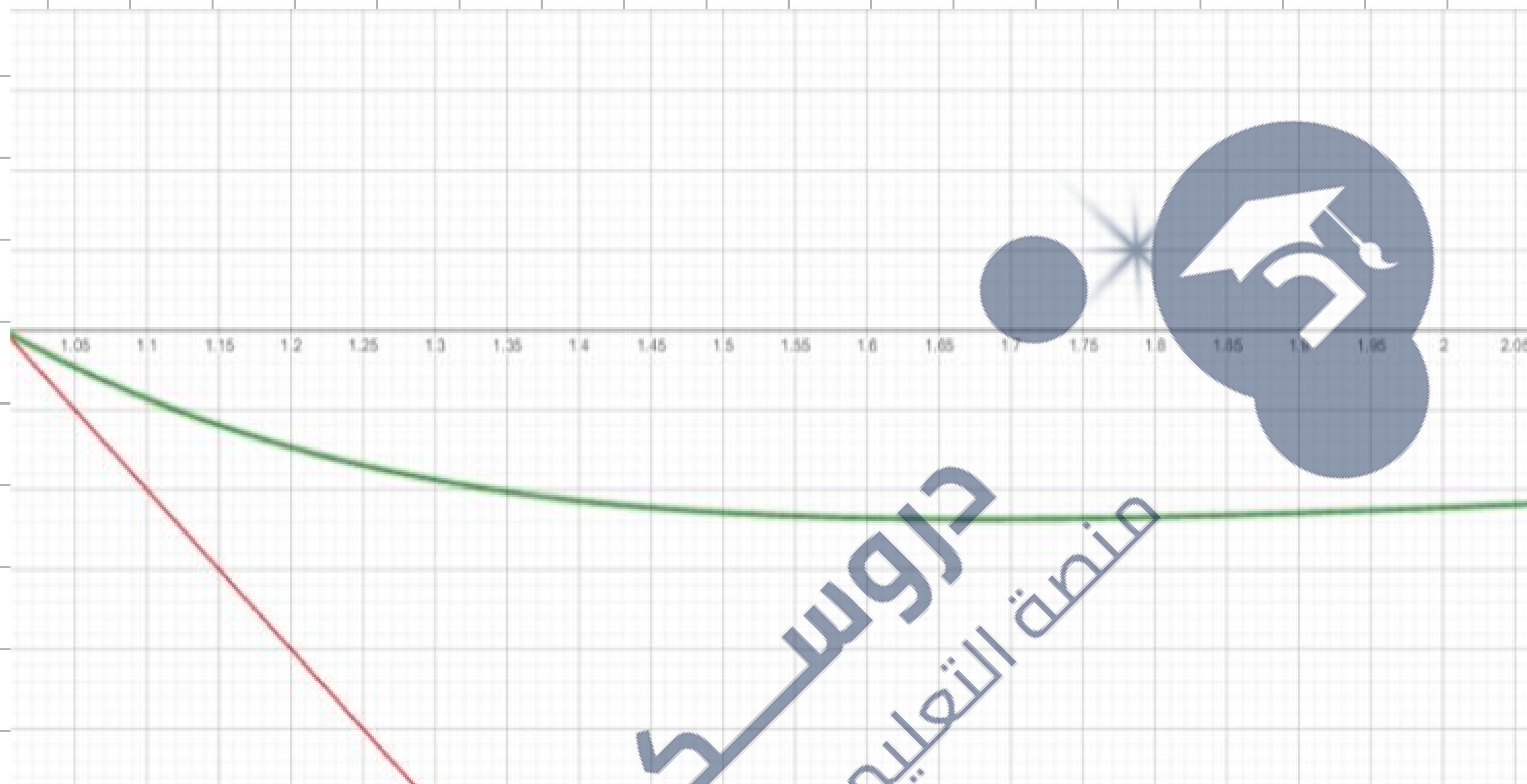
5) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (T) .

6) أرسم كل من (C_f) و (T) . (نأخذ $\alpha=1{,}65$)

7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة: $mx^3+x-1+m=0$.


H


2.4
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.2
-0.6
-0.8
-1
-2.4
-2.2
-2
-1.8
-1.6
-1.4
-1.2
-1
-0.2
0
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2
2.4
2.6


1.05
1.1
1.15
1.2
1.25
1.3
1.35
1.4
1.45
1.5
1.55
1.6
1.65
1.7
1.75
1.8
1.85
1.95
2
2.05

1) تغيرات g :

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

g مستمرة و للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة g' حيث

$$g'(x) = 3x^2 + 6$$

المعادلة $g'(x)=0$ لا تقبل حلول $\Delta < 0$

ومنه $g'(x) > 0$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$

3) دوال عددية واردة في البكالوريا:

التمرين 01: (بكالوريا تقني رياضي 2017 م 2)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 6x + 12$$

1) ادرس تغيرات الدالة g.

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in]-1,48;-1,47[$

- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \dfrac{x^3-6}{x^2+2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي م م م وم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ب) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f، و شكل جدول تغيراتها.

2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f).

ب) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

3) بين أن $f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

4) ارسم كل من (Δ) و (C_f) 5) السؤال خاص بالتكامل

ومنه g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ α $+\infty$
$g'(x)$	+
تغيرات g	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$

$g(-1,48) =$ سالب

$g(-1,47) =$ موجب

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه يوجد $\alpha \in]-1,48;-1,47[$

$g(\alpha)=0$ حيث

إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$ α $+\infty$
$g(x)$	$-$ 0 $+$

نبين أن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in]-1,48;-1,47[$

g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]-1,48;-1,47[$

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{x^3-6}{x^2+2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي م م م وم $(O;\vec{i};\vec{j})$

أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$

ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+2)-2x(x^3-6)}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{3x^4+6x^2-2x^4+12x}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{x^4+6x^2+12x}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{x\underbrace{(x^3+6x+12)}_{g(x)}}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{x\,g(x)}{(x^2+2)^2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$\alpha , 0$

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
تغيرات f	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$f(0)=-3$	↗	$+\infty$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x-6}{x^2+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{x} = 0$

نفس الطريقة عند $-\infty$

2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f).

ب) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

3) بين أن $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

4) ارسم كل من (Δ) و (C_f) 5) السؤال خاص بالتكامل

يجب أن $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - y = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-6}{x^2+2} - x =$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-6-x(x^2+2)}{x^2+2}$

ومنه $y = x$ هي معادلة مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$

الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

$f(x) - y$ حيث $y = 2x$

$f(x) - 2x = \frac{-2x-6}{x^2+2}$

x	$-\infty$ -3 $+\infty$
$f(x)-y$	$+$ 0 $-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ) (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(-3;-6)$ (C_f) تحت (Δ)

① نبين أن $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$

$-1,48<\alpha<-1,47$

$\alpha^3+6\alpha+12=0 \leftarrow g(\alpha)=0$

نبين أن $f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=0$

$$f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=\frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}-\left(\frac{3}{2}\alpha\right)=\frac{\alpha^3-6-\left(\frac{3}{2}\alpha\right)(\alpha^2+2)}{\alpha^2+2}$$

$$=\frac{\alpha^3-6-\frac{3}{2}\alpha^3-3\alpha}{\alpha^2+2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}\alpha^3-3\alpha-6}{\alpha^2+2}=\frac{-\frac{1}{2}\overbrace{(\alpha^3+6\alpha+12)}^{=g(\alpha)=0}}{\alpha^2+12}=0$$

$\Downarrow$

$f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$

$$-1,48 < \alpha < -1,47$$

$$f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$$

$$\frac{3}{2}(-1,48) < \frac{3}{2}\alpha < \frac{3}{2}(-1,47)$$

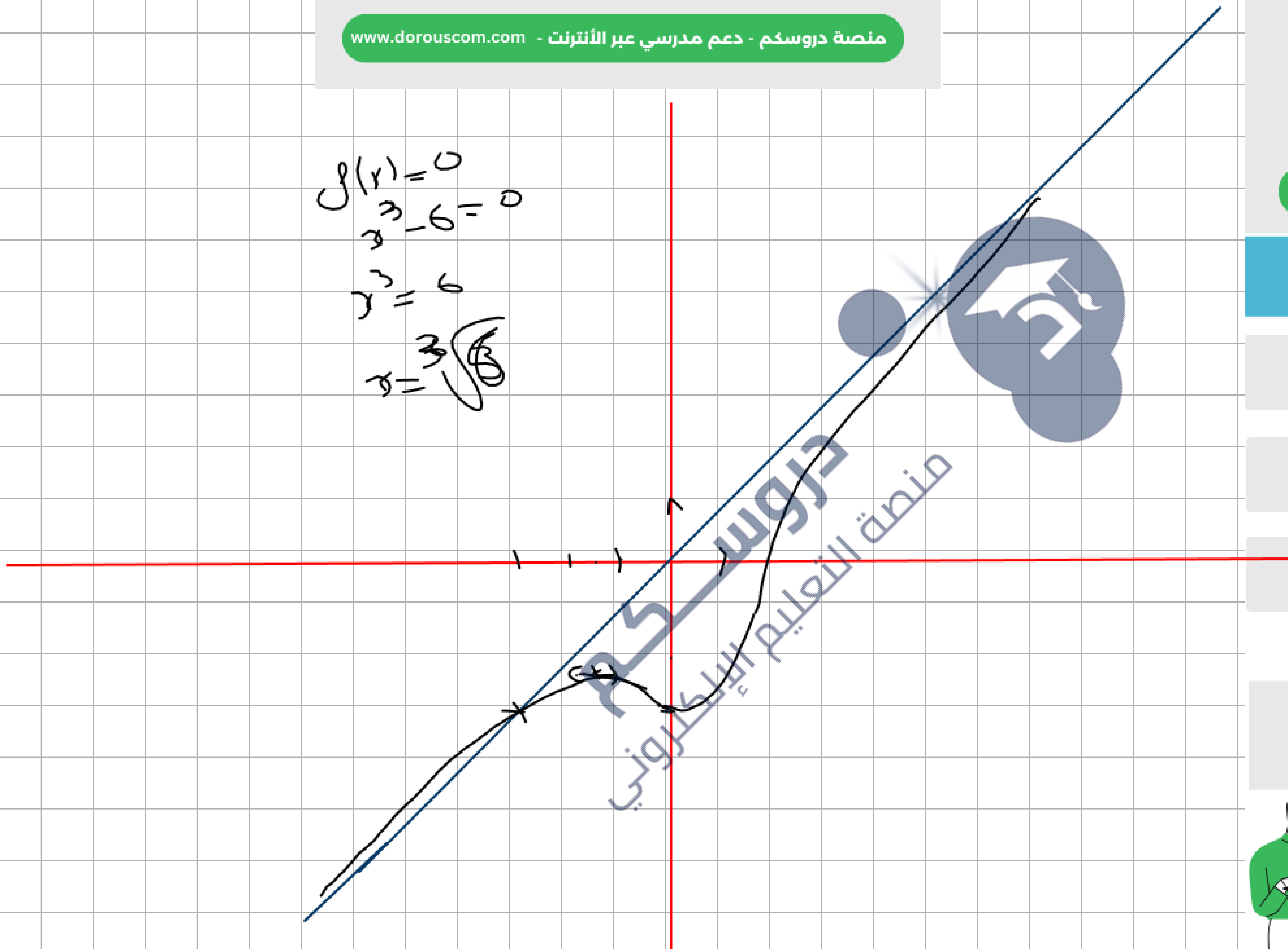
$$-2,22 < f(\alpha) < -2,20$$

$f(x)=0$

$x^3-6=0$

$x^3=6$

$x=\sqrt[3]{6}$



التمرين 02: (بكالوريا 2014 ع علوم تجريبية م 2)

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$$

1) أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

2) أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,7<\alpha<0,8$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في م م م م و $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

ب) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

جـ) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .

3) أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{x\cdot g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .(نأخذ $f(\alpha)\approx-0,1$)

4) احسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

5) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

6) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=\frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)-2$.

ب) استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه ، ثم أنشئ (C_h).