

## النهايات

لماذا نغير صيغة كند  $x=0$

لماذا نقيس  $x=0$  من  $f(x)$  التي تقرب؟

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \mathbb{R}^*$$

لماذا نقيس  $x=0$  من هذه الحالة أننا نقيس  $\frac{1}{x}$

أو  $x=0$  من  $f(x)$

دروسكم  
منصة التعليم الإلكتروني

ملف الحصة المباشرة و المسجلة

1 حصص مباشرة

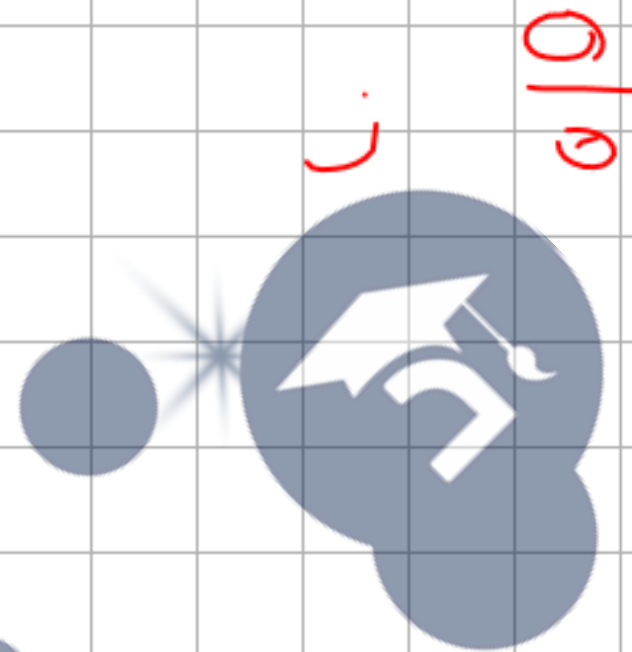
2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



$$h = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$



دروسكم  
منصة التعليم الإلكتروني

دروسكم  
منصة التعليم الإلكتروني

ملف الحصة المباشرة و المسجلة

1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

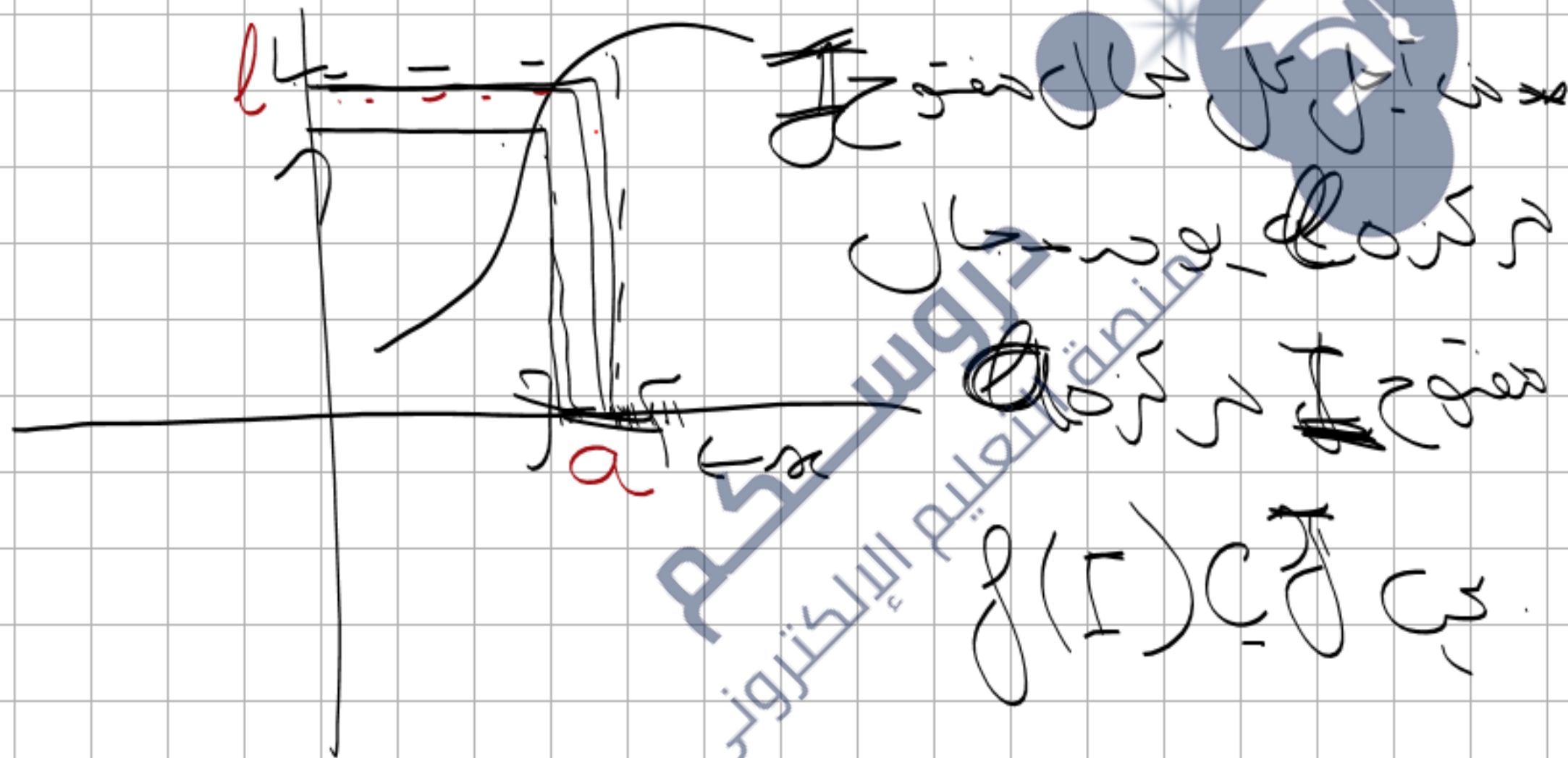
3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



تقريباً: نقول ان ضابطة العقل لها  $\alpha$  يتحول الى  $a$  ل

وان ايماننا اننا قد تقترّب من  $a$  ، اننا تقترّب من  $a$



دروسكم

منصة التعليم الإلكتروني

ملف الحصة المباشرة و المسجلة

1 حصص مباشرة

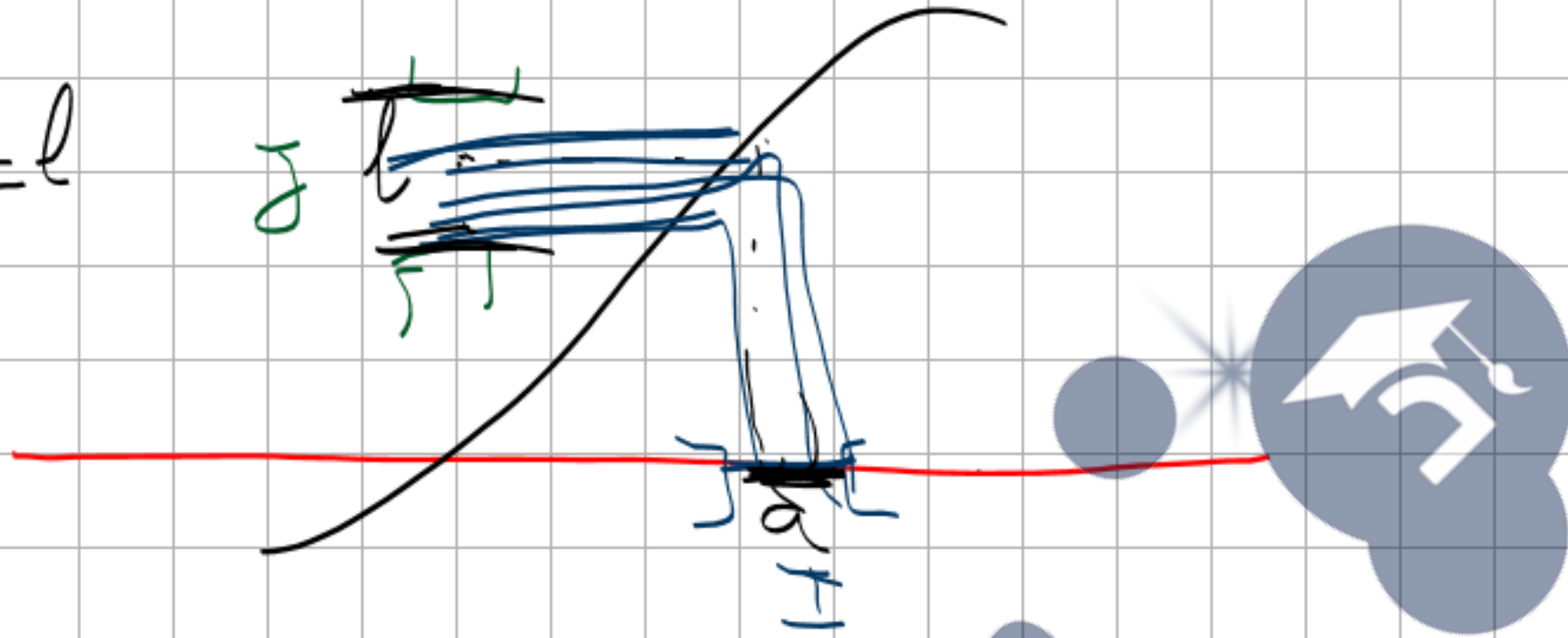
2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$



منصة التعليم الإلكتروني دروسكم

دروسكم  
منصة التعليم الإلكتروني

ملف الحصة المباشرة و المسجلة

1 حصص مباشرة

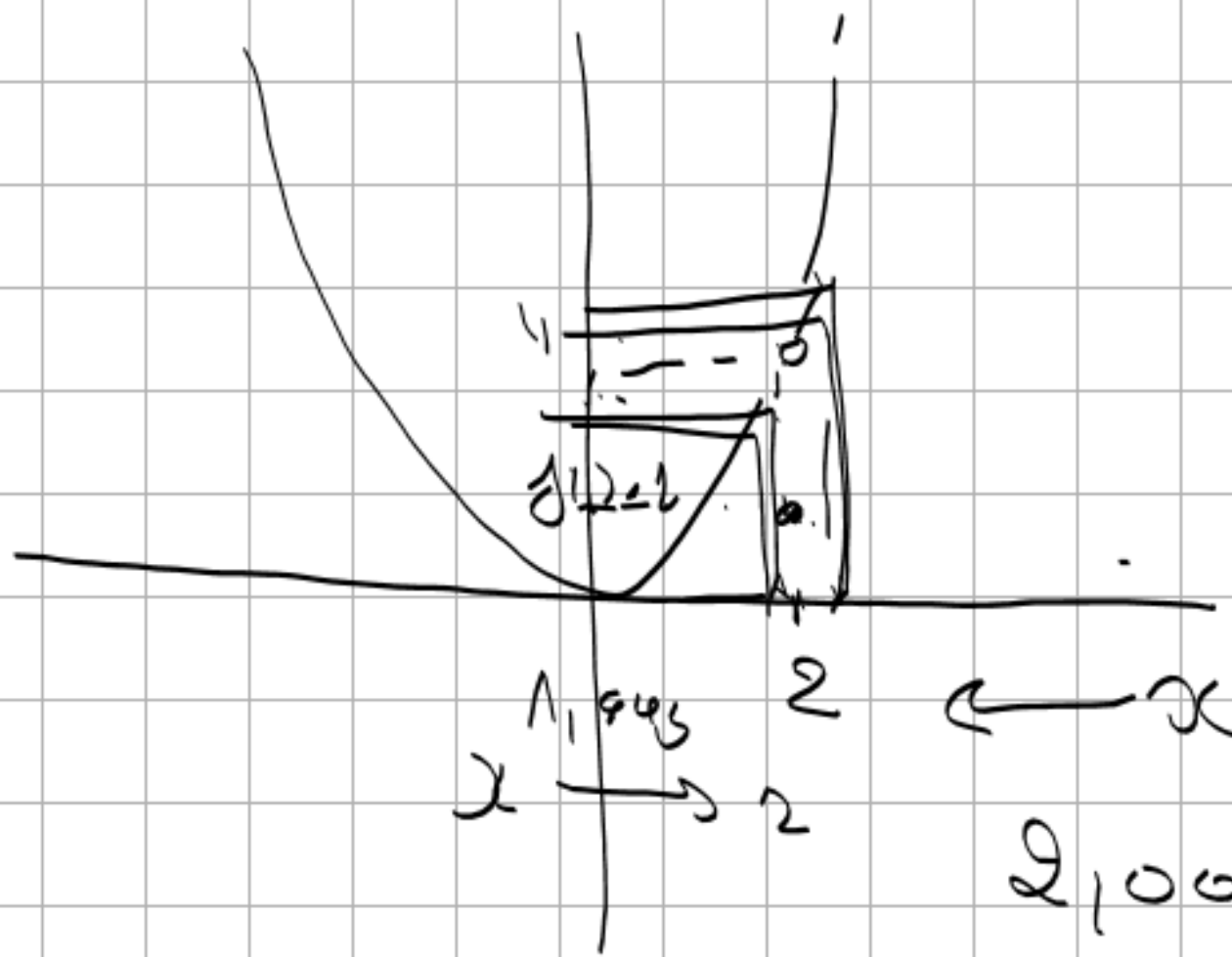
2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك







$$D_f = \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^2, \quad x \neq 2$$

$$f(2) = 1, \quad x = 2$$

$$f(x) = 4$$

2, 0, 0, 0, 2

منصة دروسكم  
منصة التعليم الإلكتروني

دروسكم

منصة التعليم الإلكتروني

ملف الحصة المباشرة و المسجلة

1 حصص مباشرة

1

2 حصص مسجلة

2

3 دورات مكثفة

3

أحصل على بطاقة الإشتراك



1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



النهايات و

**مثال 1:** لتكن الدالة  $f(x) = \frac{1}{x}$ ;  $D = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$

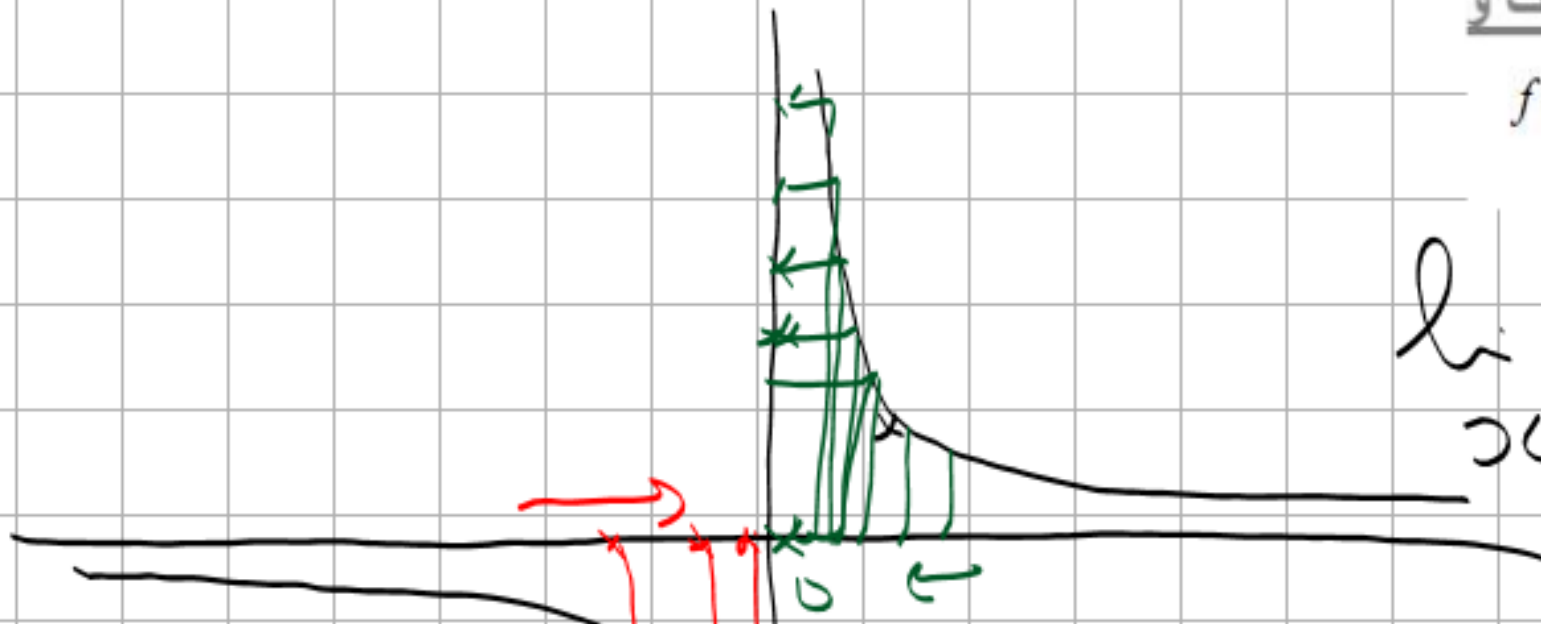
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow 0$$

$$x = 10^{-6}$$
$$f(10^{-6}) = \frac{1}{10^{-6}} = 10^6$$

$$x = 10^{-20}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

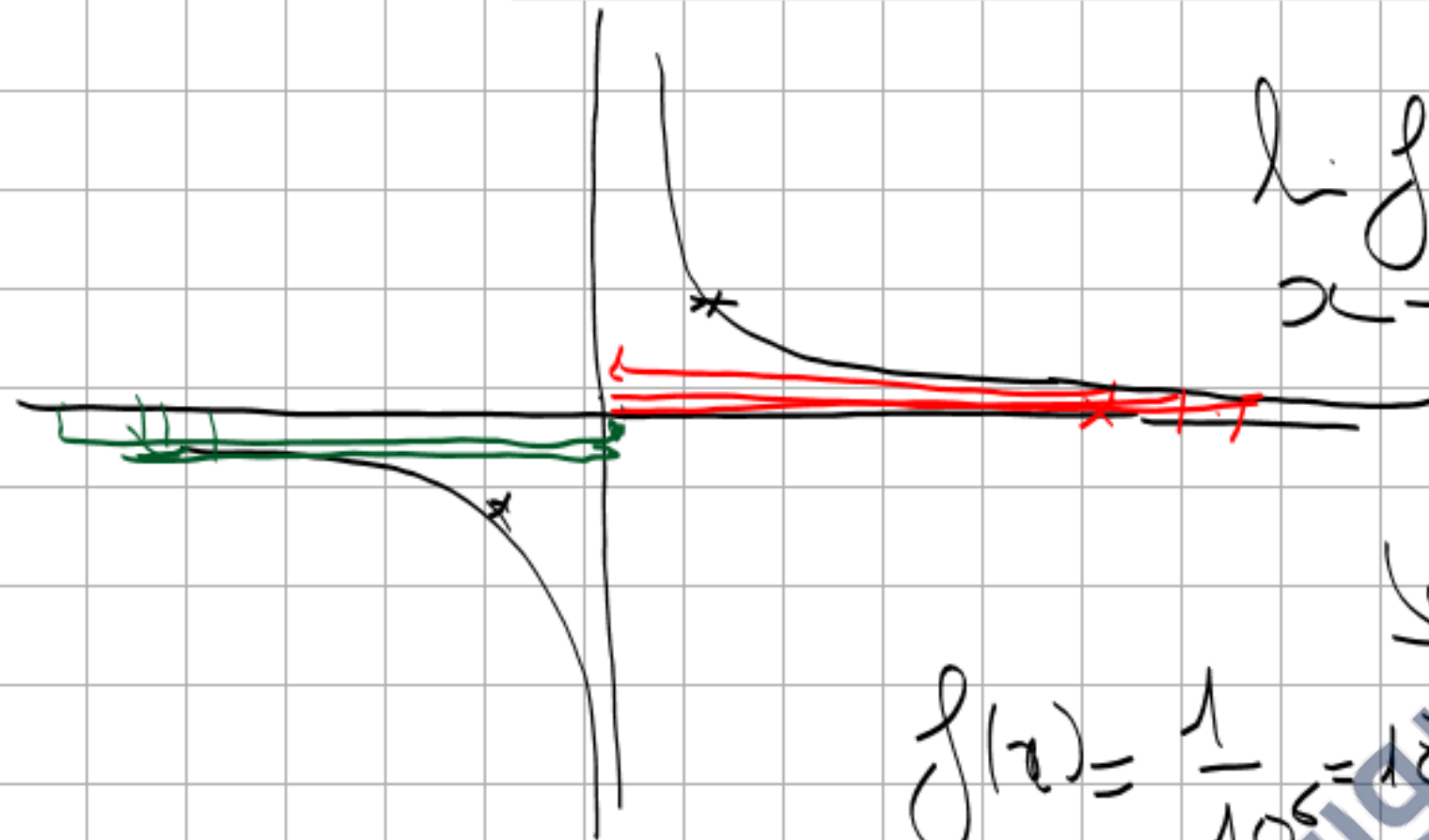


1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك

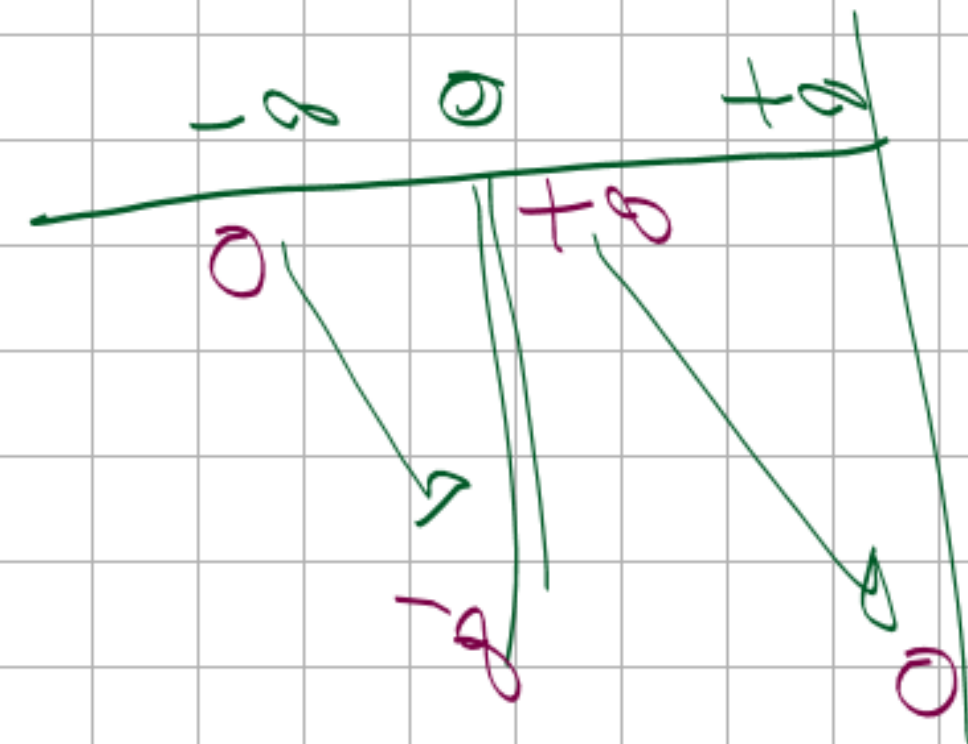


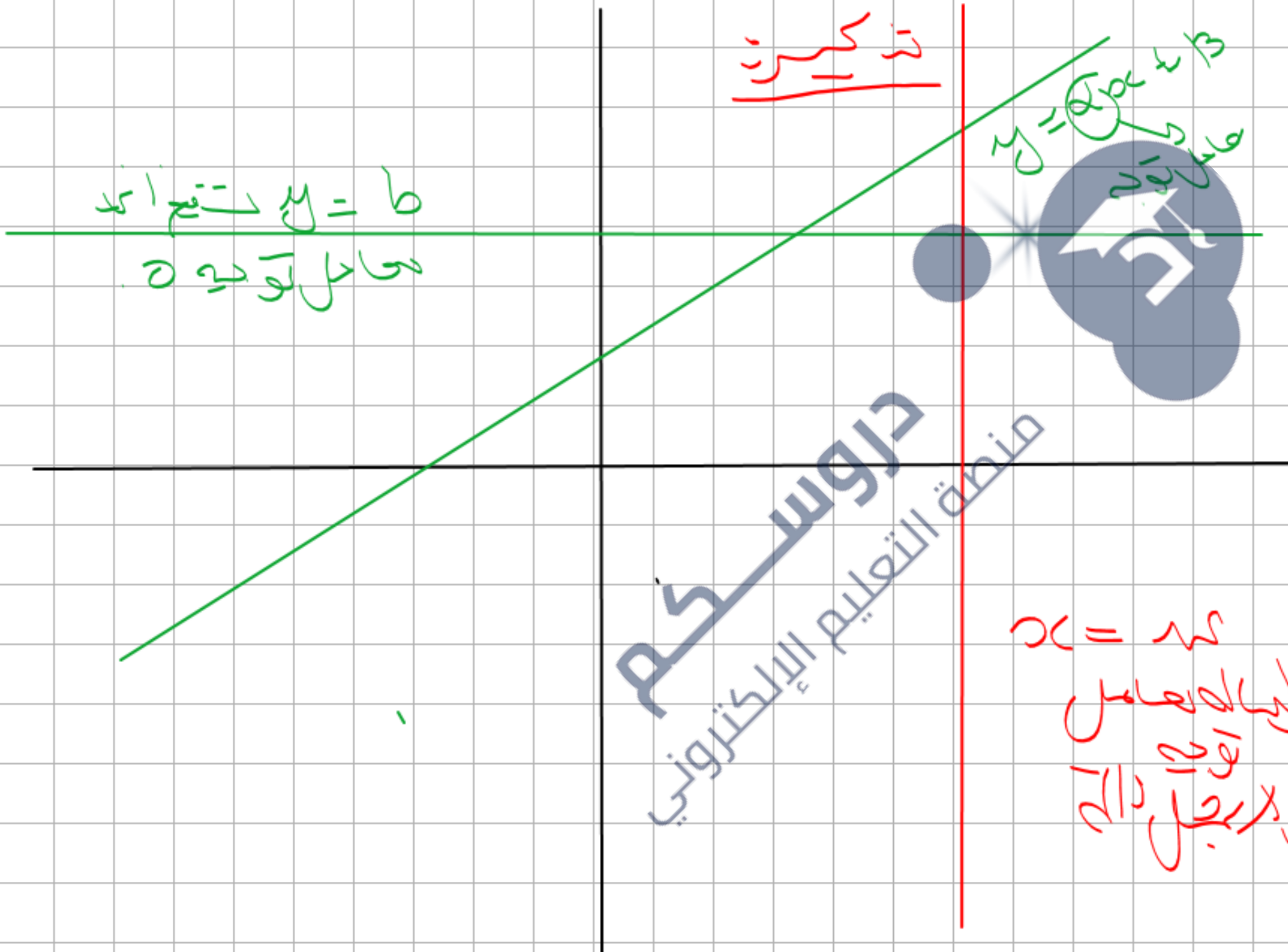
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

مع كبريا المتغير الكائنا

مثال  $x = 10^5$   $f(x) = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$





دروسكم  
منصة التعليم الإلكتروني

ملف الحصة المباشرة و المسجلة

1 حصص مباشرة

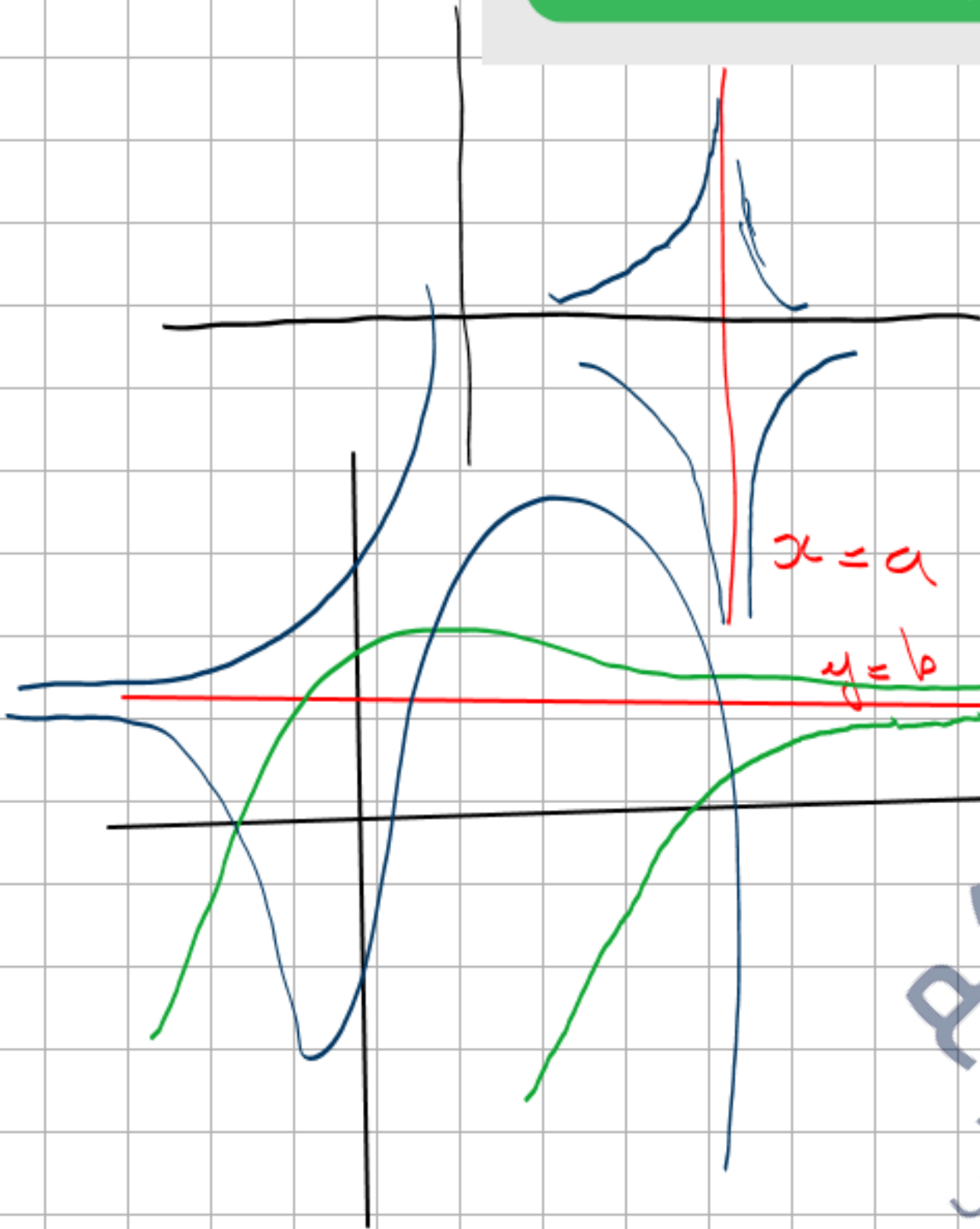
2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك







### المستقيمات المقاربة:

#### • المستقيم المقارب العمودي:

يكون المستقيم العمودي ذو المعادلة  $x = a$  مقارب لمنحنى الدالة  $f$  إذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$$

#### • المستقيم المقارب الأفقي:

يكون المستقيم الأفقي ذو المعادلة  $y = a$  مقارب لمنحنى الدالة  $f$  إذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$$

#### • المستقيم المقارب المائل:

يكون المستقيم المائل ذو المعادلة  $y = ax + b$  مقارب لمنحنى الدالة  $f$  إذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

- طريقة إيجاد المستقيم المقارب المائل:

لإيجاد معادلة المستقيم المقارب المائل للدالة  $f$  نحسب:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

بعد إيجاد قيمة  $a$  نقوم بحساب قيمة  $b$  بـ:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax)] = b$$

ملف الحصة المباشرة و المسجلة

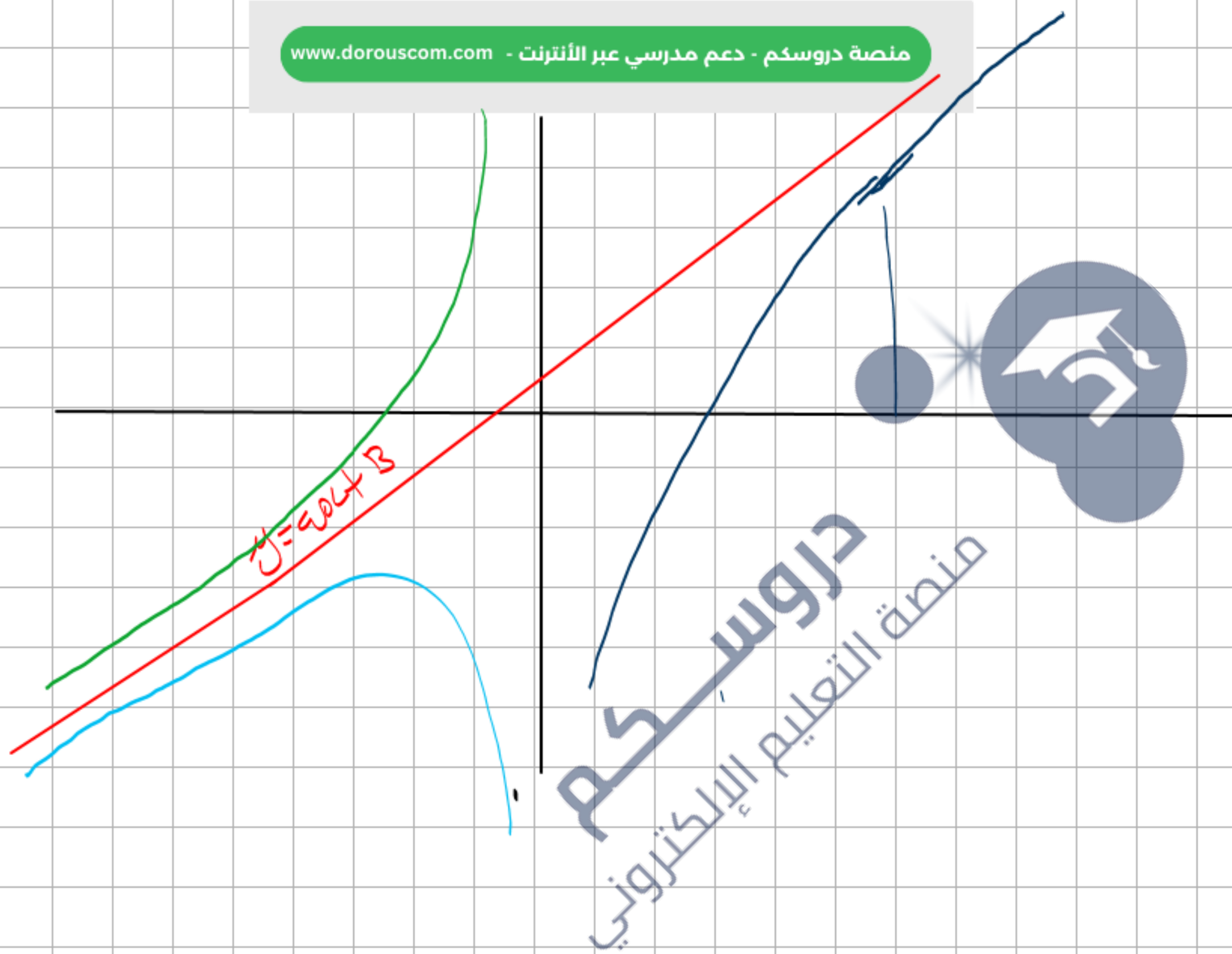
1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك





دروسكم  
منصة التعليم الإلكتروني

ملف الحصة المباشرة و المسجلة

1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



**مثال 2:** لتكن الدالة

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + 3; D = ]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$$

\*  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-2} + 3 = 3$

في  $x \rightarrow -\infty$  يكون  $x-2 \rightarrow -\infty$  فيكون  $\frac{1}{x-2} \rightarrow 0$

$y = 3$  هي عبارة عن مستقيم عمودي (د) يوازي  $x = -\infty$

\*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} + 3 = 3$

في  $x \rightarrow +\infty$  يكون  $x-2 \rightarrow +\infty$  فيكون  $\frac{1}{x-2} \rightarrow 0$

$y = 3$  هي عبارة عن مستقيم عمودي (د) يوازي  $x = +\infty$

1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

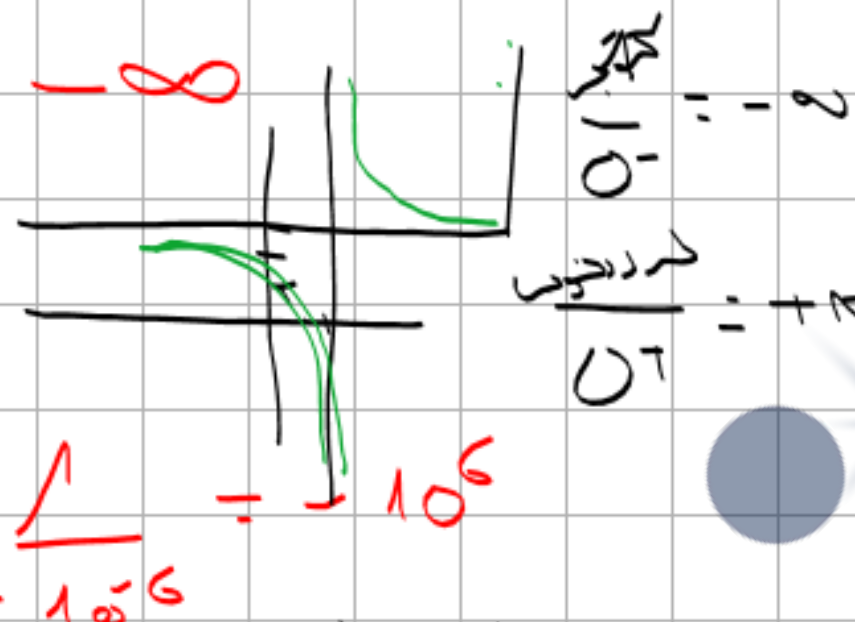
أحصل على بطاقة الإشتراك





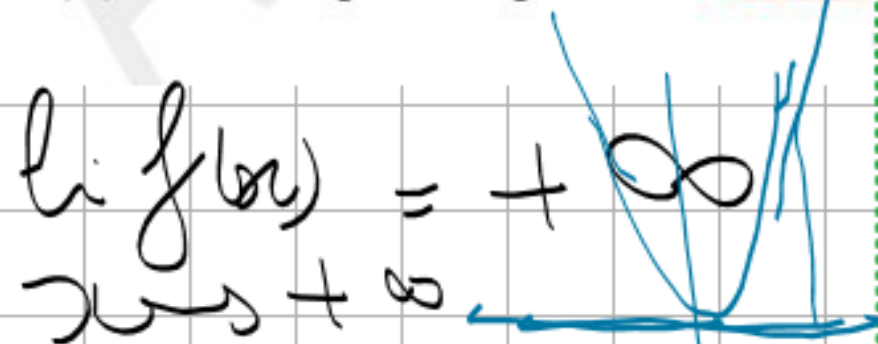
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} + 3 = -\infty$$

نقطة تقارب (2)   
 نقطة تقارب (0)   
 0   
 0



كلما  $x$  يقترب من 2 من اليمين  $y$  يقترب من  $-\infty$    
 كلما  $x$  يقترب من 2 من اليسار  $y$  يقترب من  $+\infty$    
  $x=2$    
  $y=3$    
 نقطة تقارب   
 نقطة تقارب

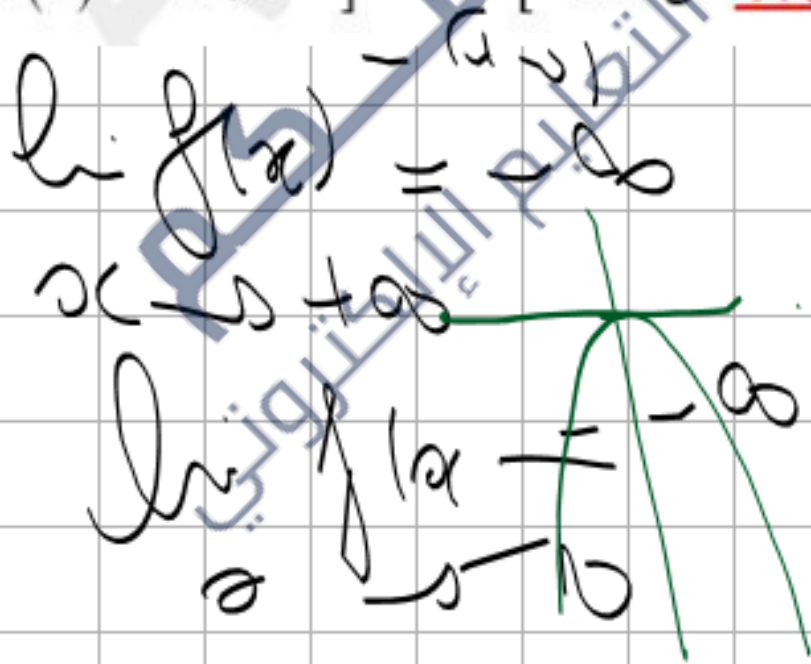
**مثال 3:** لتكن الدالة  $f(x) = x^2; D = ]-\infty; +\infty[$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

**مثال 4:** لتكن الدالة  $f(x) = -x^2; D = ]-\infty; +\infty[$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-2} = +\infty$$

كلما  $x$  يقترب من 2 من اليمين  $y$  يقترب من  $+\infty$    
 كلما  $x$  يقترب من 2 من اليسار  $y$  يقترب من  $-\infty$    
  $x=2$    
  $y=1$    
 نقطة تقارب   
 نقطة تقارب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



ملف الحصة المباشرة و المسجلة



1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



جمع - مصنفه: لا يوجد قواعد  
 للعكس أيضا  
 وكل مرة نقصد بتتابع نزلة  
 تامة  
 $l + \pm \infty = \pm \infty$   
 $l \neq 0$   
 $l \times \pm \infty$   
 $0 \times \infty$  جمع أكثر  
 $0 \times \pm \infty$  و  $0 \times \pm \infty$

مبرهنات أولية على النهايات:

• نهاية مجموع دالتين:

|   |          |           |           |           |           |           |
|---|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$          | $L$      | $L$       | $L$       | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$          | $L'$     | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + g(x)]$ | $L + L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |

• نهاية جداء دالتين:

|  |               |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|--|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$               | $L$           | $L > 0$   | $L > 0$   | $L < 0$   | $L < 0$   | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$       | $0$       |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$               | $L'$          | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \times g(x)]$ | $L \times L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ح.ع.ت     | ح.ع.ت     |

• نهاية حاصل قسمة دالتين:

|   |                |              |           |           |           |           |              |              |     |
|---|----------------|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------------|--------------|-----|
| $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$              | $L$            | $+\infty$    | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $0$       | $\pm \infty$ | $\infty$     | $0$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$              | $L' \neq 0$    | $\pm \infty$ | $L' > 0$  | $L' < 0$  | $L' > 0$  | $L' < 0$  | $0$          | $\pm \infty$ | $0$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ | $\frac{L}{L'}$ | $0$          | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ح.ع.ت        | ح.ع.ت        | $0$ |

ملاحظات:

- نهاية دالة كثير حدود عند  $+\infty$  أو  $-\infty$  هي نهاية الحد الأعلى درجة.
- نهاية دالة ناطقة عند  $+\infty$  أو  $-\infty$  هي نهاية الحد الأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام.

دروسكم  
 منصة التعليم الإلكتروني

ملف الحصة المباشرة و المسجلة

1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك







**التمرين 1:** أحسب النهايات التالية :

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 - 2x^2 + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 = +\infty$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 - 2x^2 + 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 = -\infty$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^2 = -\infty$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^2 = -\infty$$

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 - 2x^2 + 4$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 - 2x^2 + 4$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^2 + x - 2$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^2 + x - 2$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 5}{x^2 + 1}$$

$$\textcircled{6} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 5}{x^2 + 1}$$

$$\textcircled{7} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + x - 2}{x^3 - 2x + 1}$$

$$\textcircled{8} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + x - 2}{x^3 - 2x + 1}$$

$$\textcircled{9} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x - 2}{5x + 1}$$

$$\textcircled{10} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 2}{5x^3 + 2x^2 - 1}$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 5}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\textcircled{6} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 5}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\textcircled{7} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + x - 2}{x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3}{x^3} = -2$$

$$\textcircled{8} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + x - 2}{x^3 - 2x + 1} = -2$$

دروسكم

منصة التعليم الإلكتروني

ملف الحصة المباشرة و المسجلة

حصص مباشرة

1

حصص مسجلة

2

دورات مكثفة

3

أحصل على بطاقة الإشتراك





$$x^3 = x \times x^2$$

9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + x - 2}{5x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{5} x^2$

10)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 2}{5x^3 + 2x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{5x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{5x} = 0$



ملف الحصة المباشرة و المسجلة

- 1 حصص مباشرة
- 2 حصص مسجلة
- 3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = 1 \end{aligned}$$

**التمرين 2:**  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}; D_f = ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$

(1) أحسب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجال

تعريفها و استنتج المستقيمات المقاربة

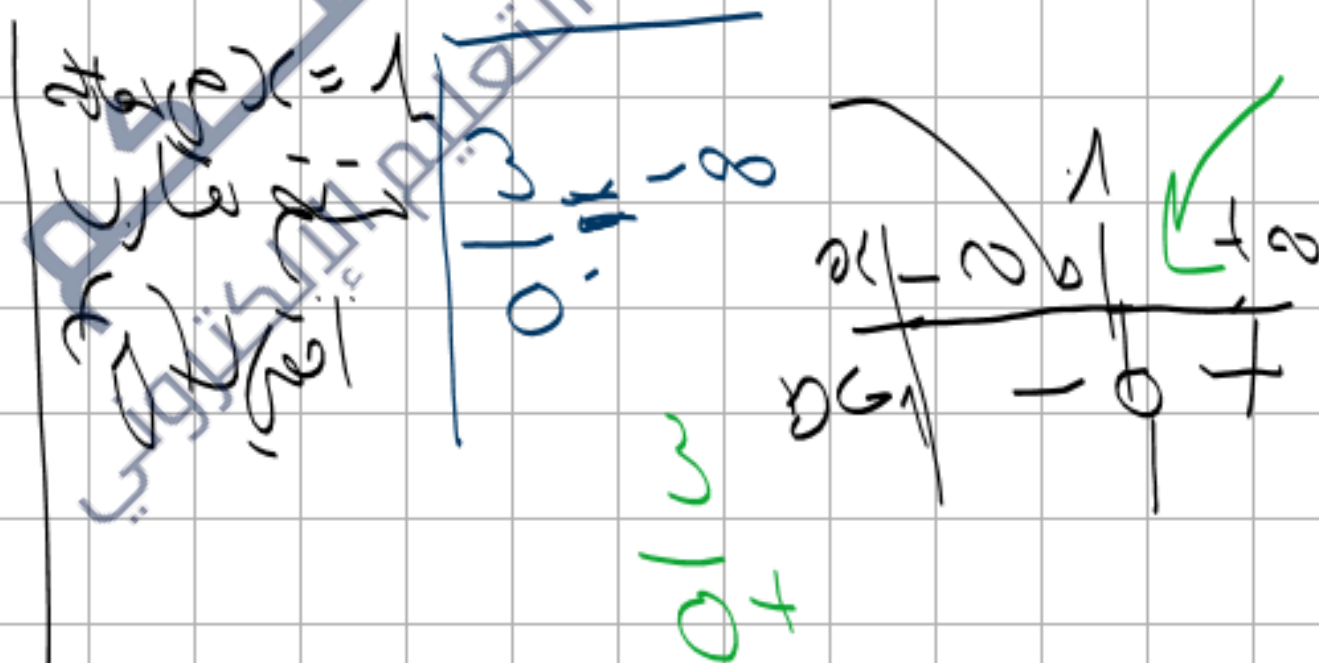
لمنحناها.

أحسب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجال تعريفها و استنتج المستقيمات المقاربة لمنحناها.

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$* \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$



1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



حصص مباشرة

1

حصص مسجلة

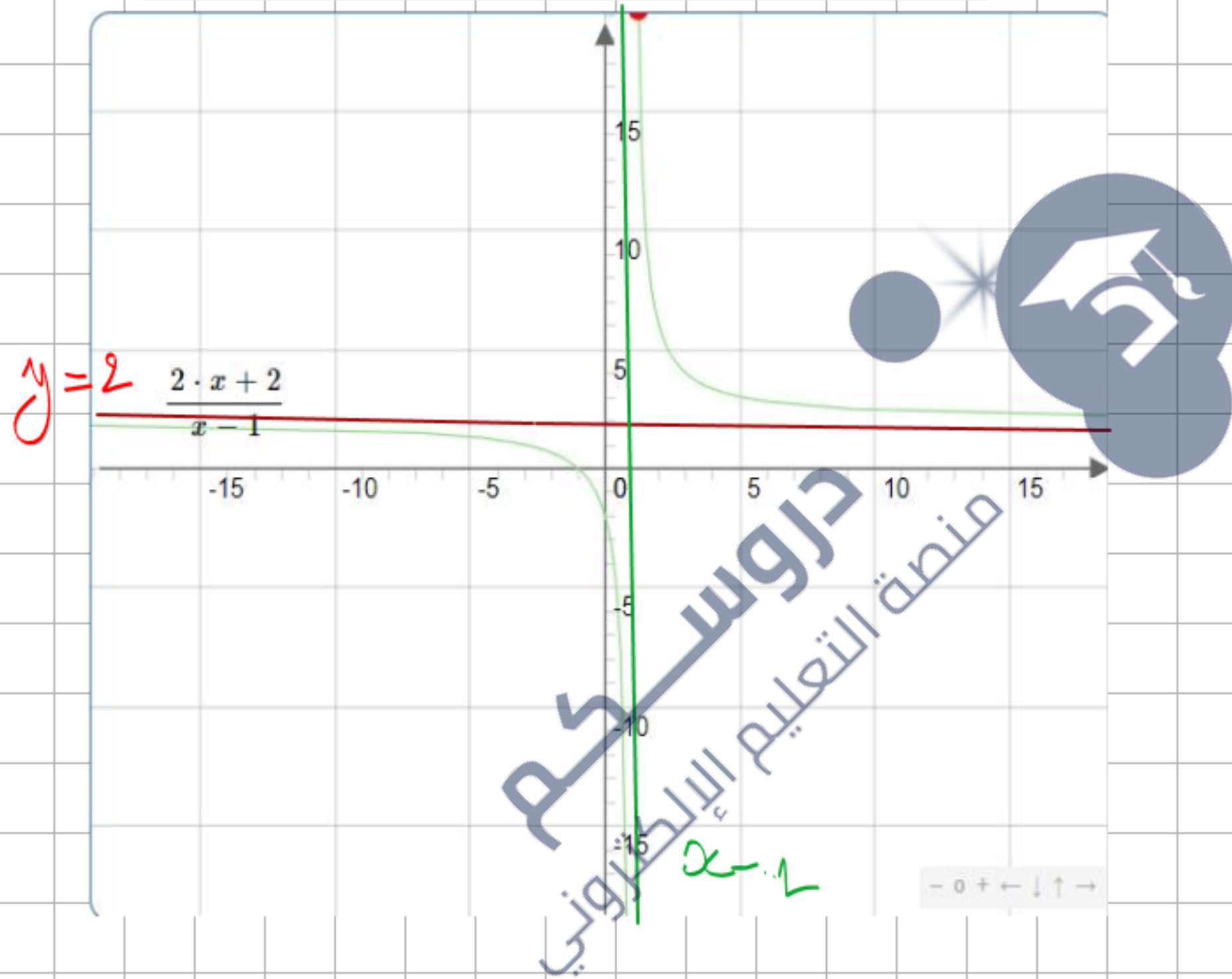
2

دورات مكثفة

3

أحصل على بطاقة الإشتراك





دروسكم  
منصة التعليم الإلكتروني

ملف الحصة المباشرة و المسجلة

1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك





**التمرين 3:**

$$f(x) = \frac{x+5}{x^2-1}; D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

(1) أحسب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجال

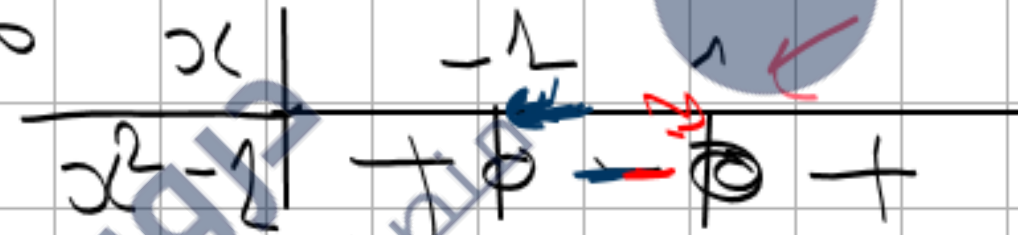
تعريفها و استنتج المستقيمات المقاربة لمنحناها.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+5}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

أحصل على بطاقة الإشتراك





1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

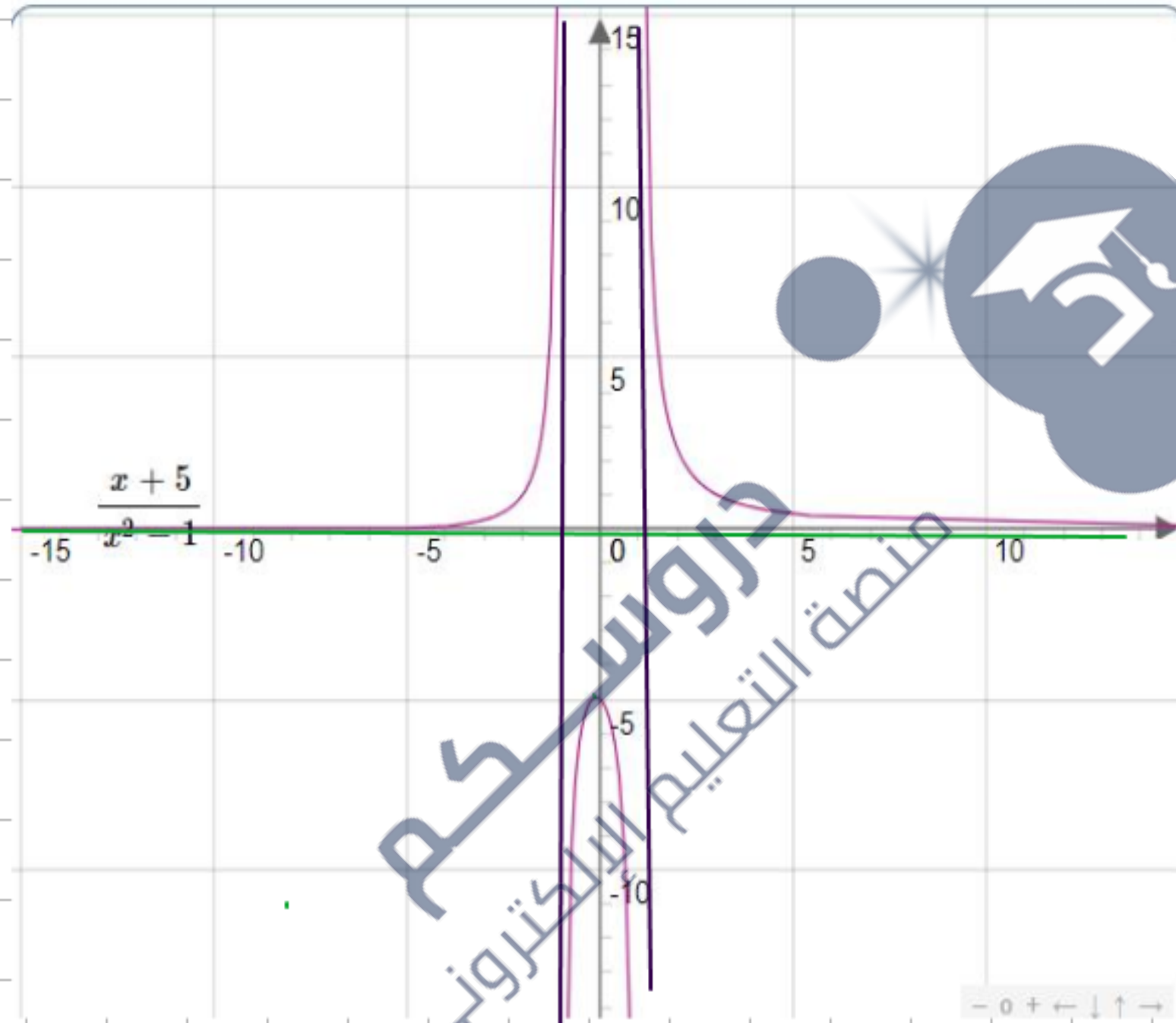
3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



دروسكم  
منصة التعليم الإلكتروني





دروسكم  
منصة التعليم الإلكتروني

ملف الحصة المباشرة و المسجلة

1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك



### التمرين 4:

في كل حالة من الحالات التالية أحسب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجموعة التعريف، وعين معادلات المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة  $f$ .

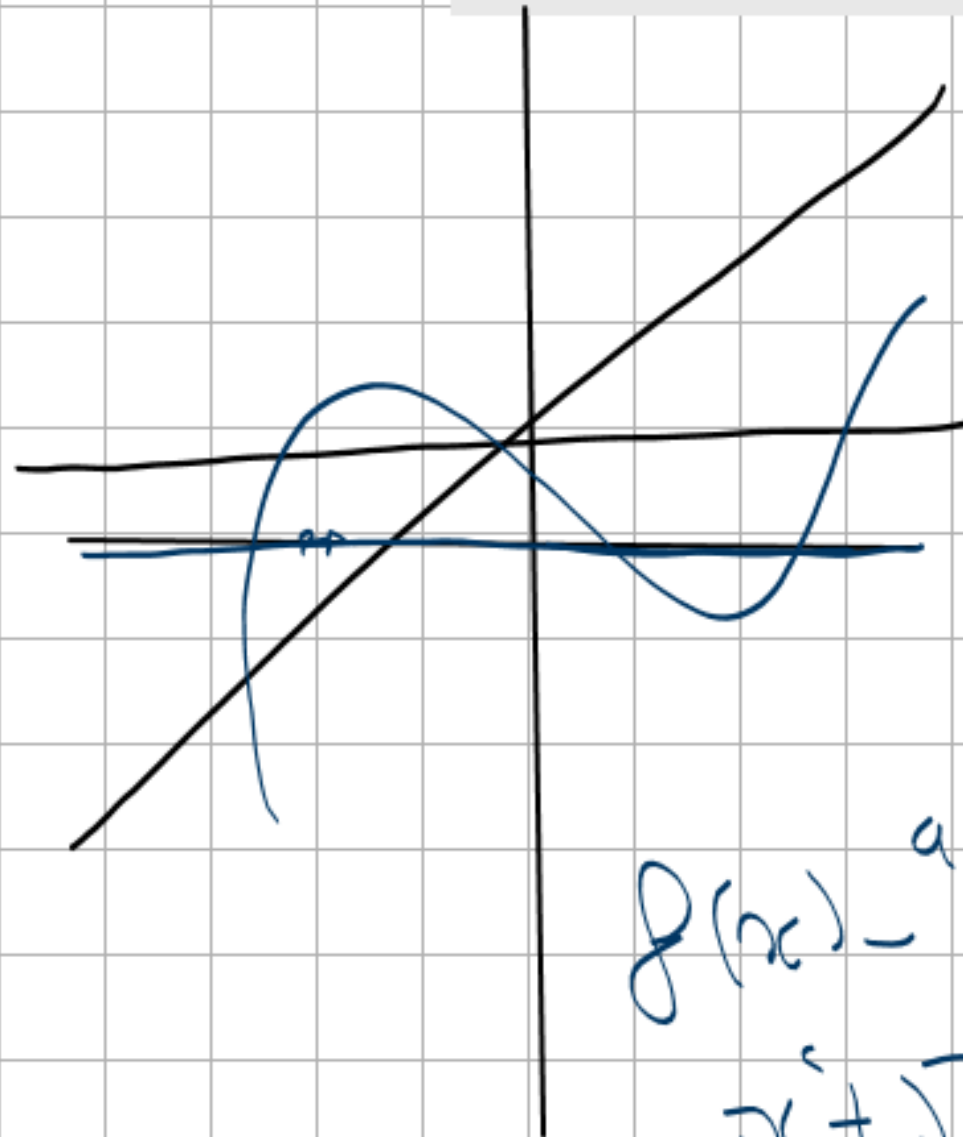
$$D_f = ]-\infty, 1[ \cup ]3, +\infty[; f(x) = \frac{-x^2 + 4x}{x^2 - 4x + 3} \quad (1)$$

$$D_f = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[; f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 1} \quad (2)$$

$$D_f = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[; f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x - 1)^2} \quad (3)$$

$$D_f = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[; f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \quad (4)$$

$$D_f = ]-\infty, -1[ \cup ]3, +\infty[; f(x) = 2x + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{3-x} \quad (5)$$



Handwritten notes:  $f(x) = y$ ,  $a_{x+h}$ ,  $x^2 + 5$

Handwritten notes:  $\frac{x^2 + 5}{x^2}$ ,  $x^2 + 5$ ,  $x^2 - 1$

Handwritten notes:  $x = -5$ ,  $x^2 + 5$ ,  $x^2 - 1$

أحصل على بطاقة الإشتراك



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

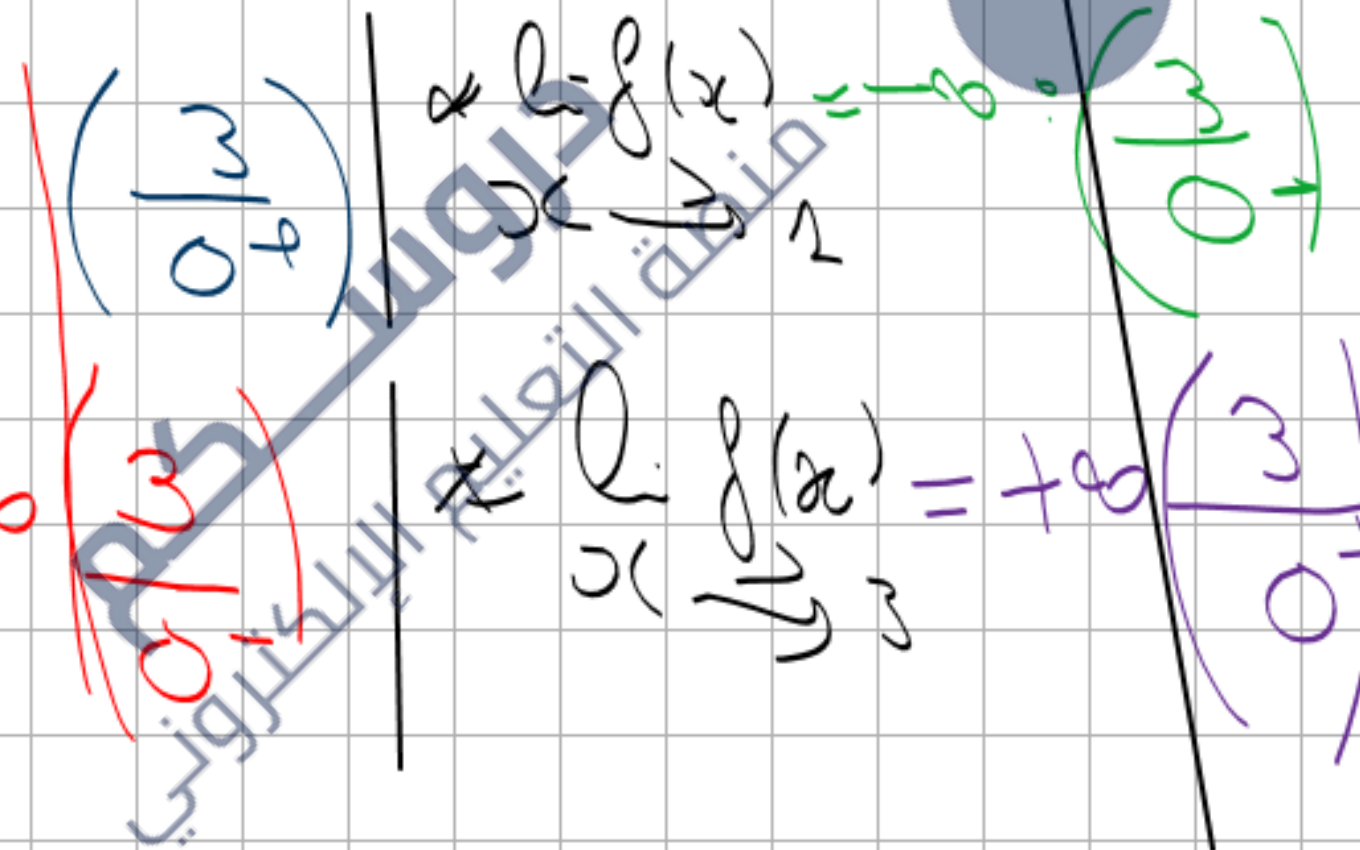
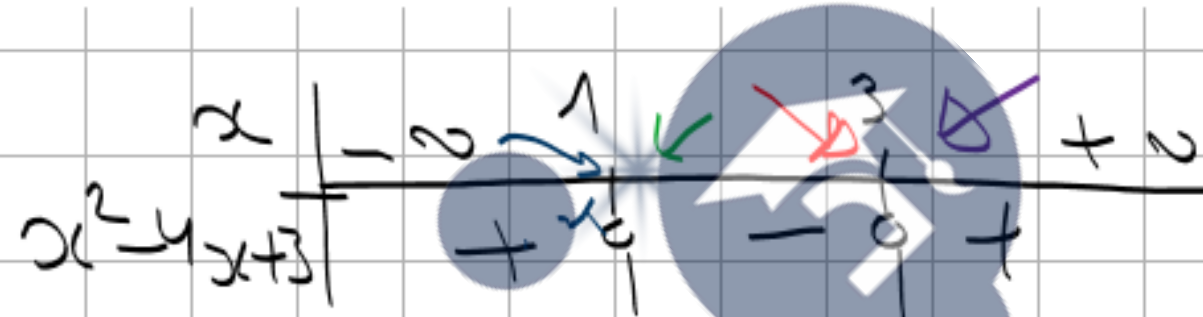
$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$1) f(x) = \frac{-x^2 + 4x}{x^2 - 4x + 3}; D_f = ]-\infty; 1[ \cup ]3; +\infty[$$



1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك





المتطلبات الحضرية

لحل المسألة نحتاج إلى معرفة عدد الأعداد الأولية بين 1 و 100

1-1 = 100 - 1 = 99

1 حصص مباشرة

2 حصص مسجلة

3 دورات مكثفة

أحصل على بطاقة الإشتراك

