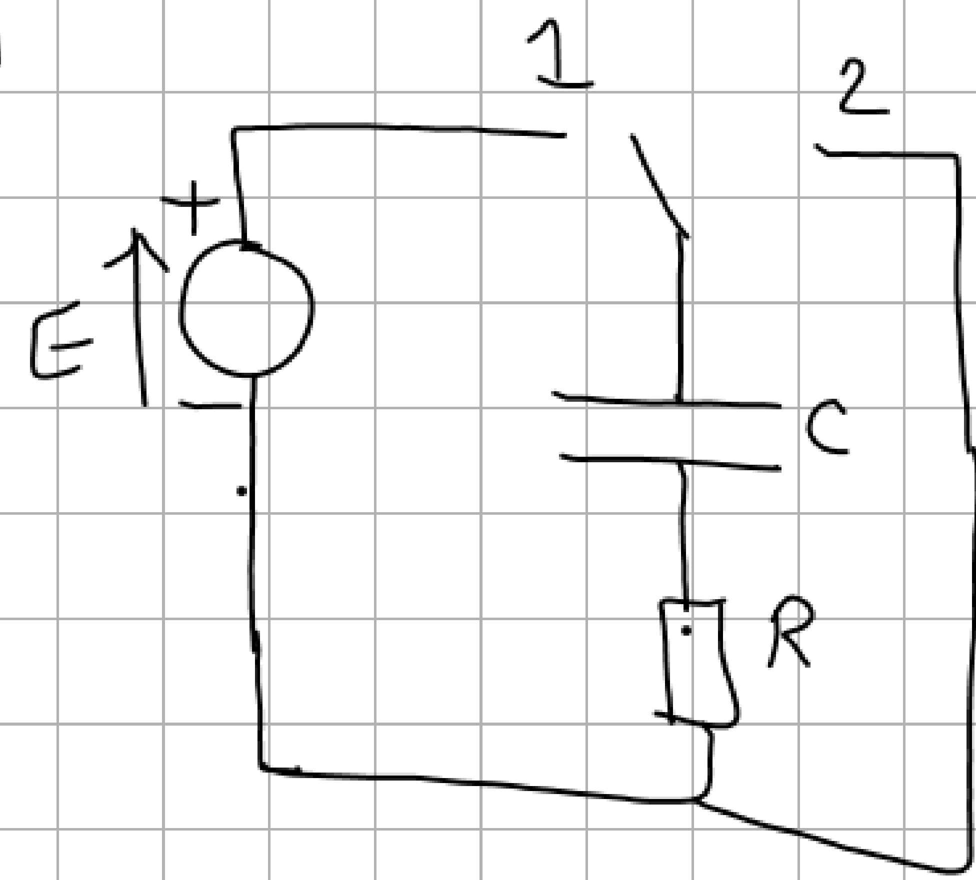
ثنائي القطب RC

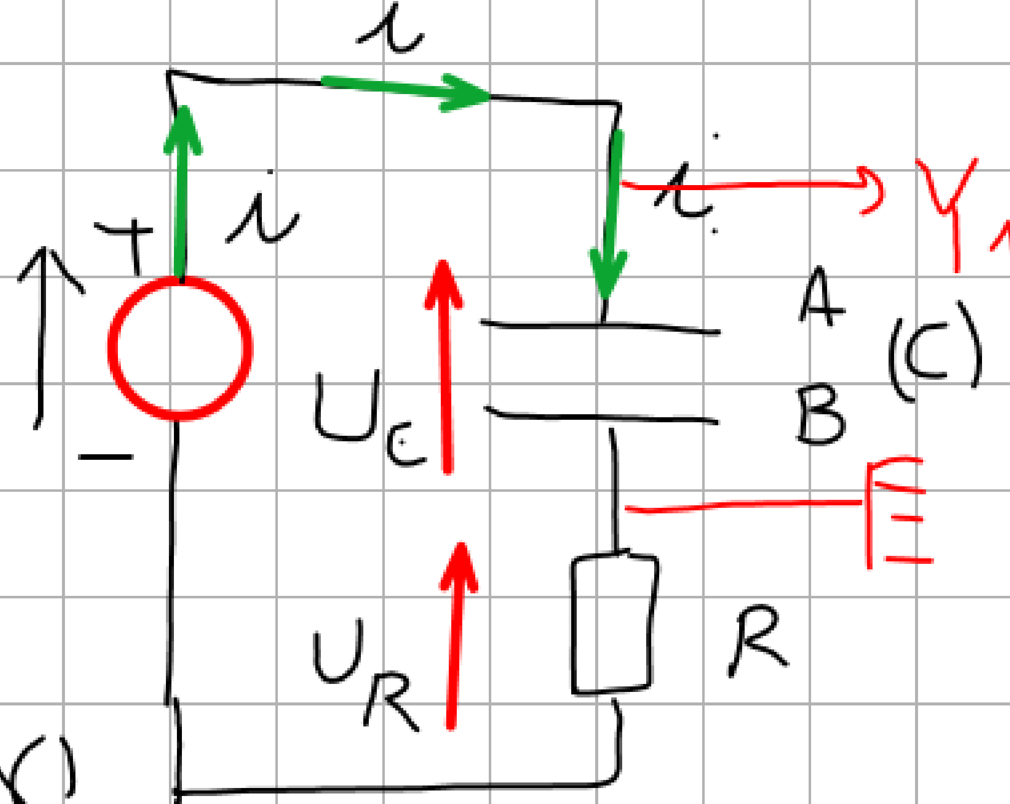
البادلة في الوضع ① ظاهرة شحن

البادلة في الوضع ② ظاهرة التفريغ



المعادلة التفاضلية بدلالة q و $\frac{dq}{dt}$

i جهته دوماً من (+) نحو (−)



س2/ حدد جهة U_C و U_R بسهم

س3/ لديكم $q(t)$ كيف يتم ربط راسم

(٢ ١) اهتزاز المهبطي مع التعليل

راسم الاهتزاز المهبطي

E ، $U_C = \frac{q}{C}$ ، $U_R = Ri$

لديكم $q(t)$ نربط راسم الاهتزاز

المهبطي طرفي المكثفة لأن

U_C و q متماثلان (متناسبان طرداً)

$$U_C \nearrow = \frac{q}{C} \nearrow$$

س3/ في غياب راسم الاهتزاز المهبطي ما هو الجهاز الذي يعوضه

اما جهاز $(EXAO)$ أو PC بذاكرة.

س4/ أكتب عبارة U_C بدلالة q و C

$$\boxed{U_C = \frac{q}{C}}$$

" " U_R بدلالة R و $\frac{dq}{dt}$

$U_R = Ri \qquad i = \frac{dq}{dt}$

$$\boxed{U_R = R\frac{dq}{dt}}$$

س5/ بتطبيق قانون جمع التوترات

أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة q و $\frac{dq}{dt}$

$$U_C + U_R = E$$

$$\frac{q}{C} + Ri = E$$

$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = E$$

$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}}$$

$$U_C + U_R = E$$

$$U_C + Ri = E$$

$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = E$$

$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}}$$

حلها من الشكل

$$q(t) = A e^{\alpha t} + B$$

حيث $A \cdot B \cdot \alpha$ ثوابت يطلب

تحديدها وإعطاء مدلولها الفيزيائي

$$y' + A y = b \qquad A \to \frac{1}{\tau}$$

$$\frac{d\ldots}{dt} + A \ldots = b$$

$$\frac{dq}{dt} + \left(\frac{1}{RC}\right) q = \frac{E}{R}$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$$

$$\boxed{\tau = R \cdot C}$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R} \quad \cdots\; \mathrm{I}$$

$$q(t) = \left(A e^{\alpha t} + B\right) \quad \cdots\cdots \; ①$$

$$\frac{dq}{dt} = A\alpha e^{\alpha t} \quad \cdots\cdots \; ②$$

نعوض ① و ② في I نجد

$$A\alpha e^{\alpha t} + \frac{\left(A e^{\alpha t} + B\right)}{RC} = \frac{E}{R}$$

$$A\alpha e^{\alpha t} + \frac{A e^{\alpha t}}{RC} + \frac{B}{RC} = \frac{E}{R}$$

$$A e^{\alpha t}\Big[\underbrace{\alpha + \frac{1}{RC}}_{=0}\Big] + \Big(\underbrace{\frac{B}{RC} - \frac{E}{R}}_{=0}\Big) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + \dfrac{1}{RC} = 0 \\ \boxed{\alpha = -\dfrac{1}{RC} = \dfrac{-1}{\tau}} \end{cases}$$

$$\frac{B}{RC} - \frac{E}{R} = 0$$

$$\frac{B}{\cancel{R}C} = \frac{E}{\cancel{R}}$$

$$\boxed{B = EC}$$

$$\frac{B}{C} = \frac{E}{1}$$

$$B = EC$$

$\alpha = -\frac{1}{\tau}$ (معاكس مقلوب ثابت الزمن)

$B = EC = q_{max}$ (الشحنة الاعظمية)

$q(t) = A e^{\alpha t} + B$ ايجاد A من الشروط الابتدائية

$t = 0 \qquad q(0) = A e^{\alpha \cdot 0} + B = A + B = 0$

$U_C(0) = 0 \qquad q(0) = 0 \qquad A + B = 0 \qquad A = -B$

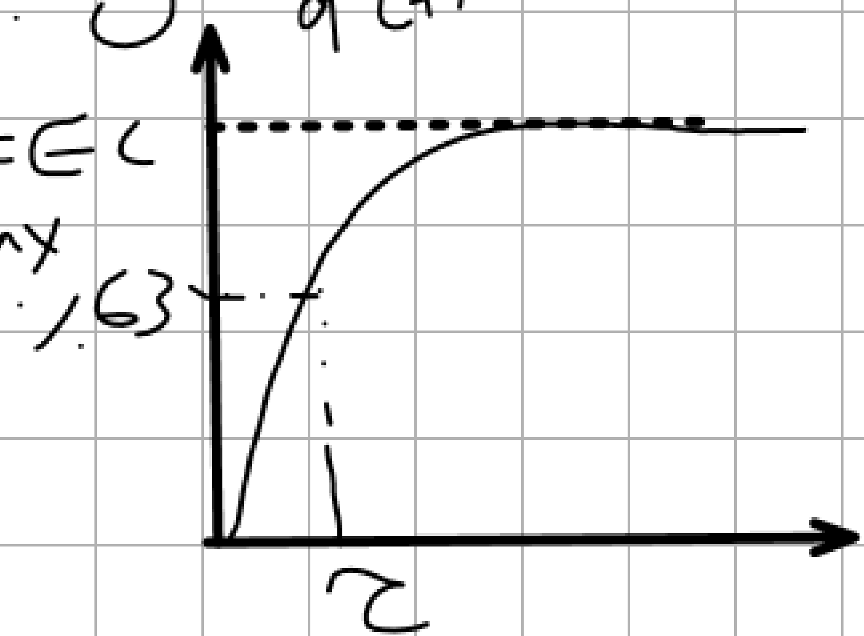
$A = -EC$

$q(t) = A e^{\alpha t} + B = -EC e^{-\frac{t}{\tau}} + EC = EC\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$$q(t) = EC\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

أكمل الجدول

t	0	τ	5τ	∞
$q(t)$	0	$0{,}63EC$	$0{,}99EC$	EC



$$q(0) = EC\left(1 - e^{0}\right) = 0$$

$$q(\tau) = EC\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right)$$

$$= EC\left(1 - e^{-1}\right) = 0{,}63\,EC = 63\%\,EC = 63\%\,Q_{max}$$

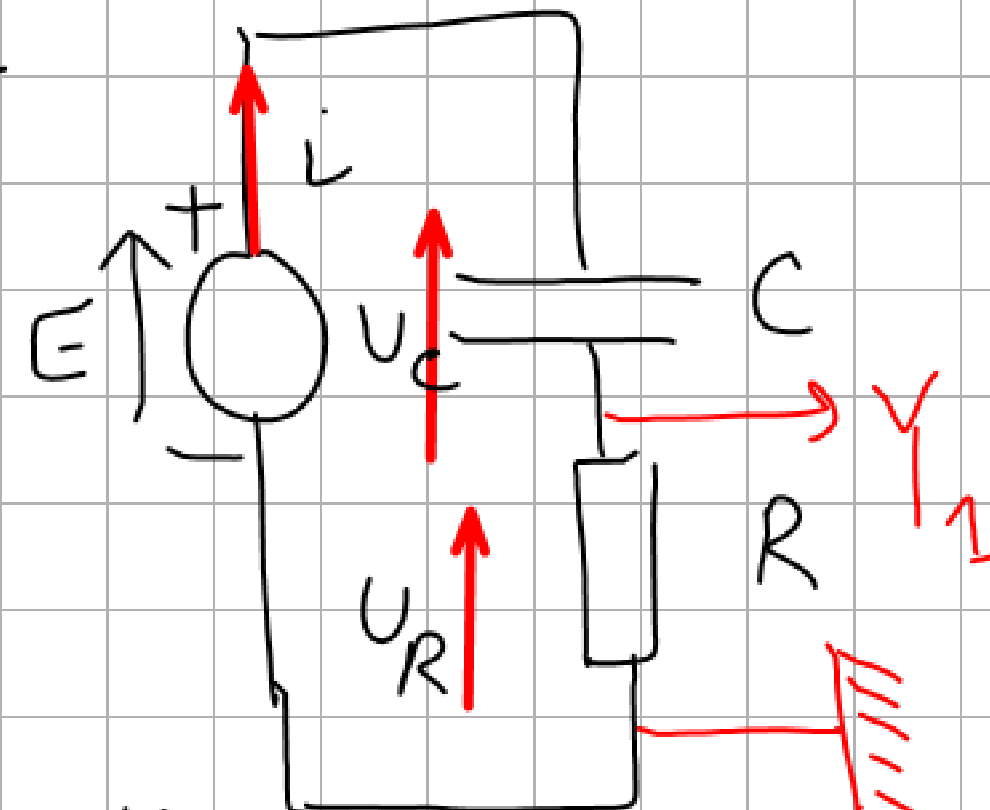
$$q(5\tau) = EC\left(1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}}\right) = EC\left(1 - e^{-5}\right) = 0{,}99\,EC = 99\%\,Q_{max}$$

$$q(\infty) = EC\left(1 - e^{-\infty}\right)$$

$$= EC$$

المعادلة التفاضلية بدلالة i و $\frac{di}{dt}$

- كيف يتم ربط راسم الاهتزاز ليعطي لنا $i(t)$ مع التعليل



- نربط بين طرفي u_R لأن u_R و i متماثلان (تناسب طردي)

$$u_R = R\,i$$

أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة i و $\frac{di}{dt}$

$$U_C + U_R = E$$

$$\left(\frac{q}{C} + Ri\right)' = (E)'$$

نشتق قانون جمع التوترات

$$\left(\frac{1}{C}\right)\frac{dq}{dt} + R\frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{i}{C} + \frac{R\,di}{dt} = 0$$

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = 0}$$

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} = Ae^{\alpha t}$$

$$i(t) = Ae^{\alpha t} + \cancel{B}_{0}$$

$E =$ ثابت

$$\boxed{\frac{dq}{dt} = i}$$

$$y' + Ay = 0$$

$$y' + Ay = 0$$

$$\frac{di}{dt}+\frac{i}{RC}=0 \quad \ldots\ldots (I)$$

حلها من الشكل

$$i(t)=Ae^{\alpha t} \quad \ldots\ldots (1)$$

حدد A و α

$$\frac{di}{dt}=A\alpha e^{\alpha t} \quad \ldots\ldots (2)$$

نعوض (1) و (2) في I نجد

$$A\alpha e^{\alpha t}+\frac{Ae^{\alpha t}}{RC}=0$$

$$Ae^{\alpha t}\underbrace{\left[\alpha+\frac{1}{RC}\right]}_{=0}=0$$

$$\begin{cases}\alpha+\dfrac{1}{RC}=0\\[2mm] \alpha=-\dfrac{1}{RC}=-\dfrac{1}{\tau}\end{cases}$$

ايجاد A من الشرط الابتدائي

$$U_C(0)+U_R(0)=E$$

$$Ri(0)=E$$

$$\boxed{i(0)=\frac{E}{R}}$$

$$i(0)=Ae^{0}=A$$

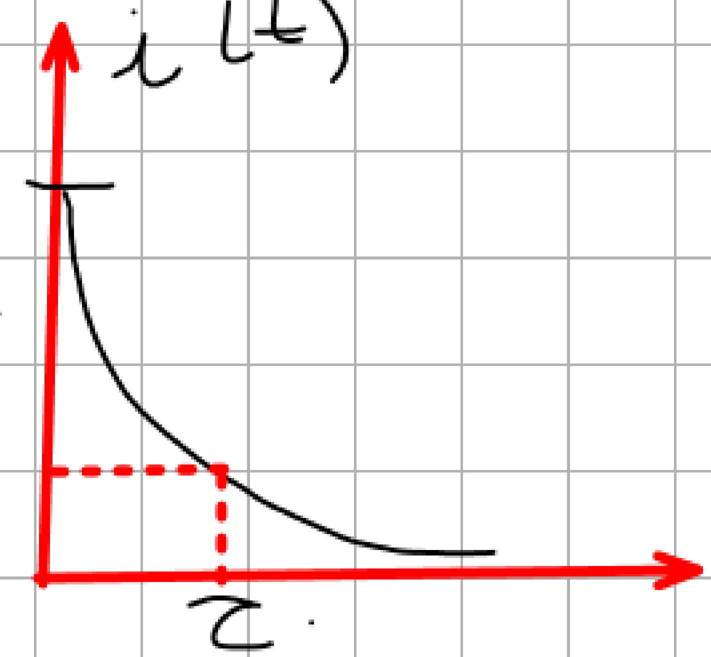
$$i(t) = A e^{\alpha t} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

t	0	τ	5τ	∞
$i(t)$	0	$37\%\,I_0$	$0{,}001\,I_0$	0

اكمل الجدول

$I_0 = \frac{E}{R}$

%37



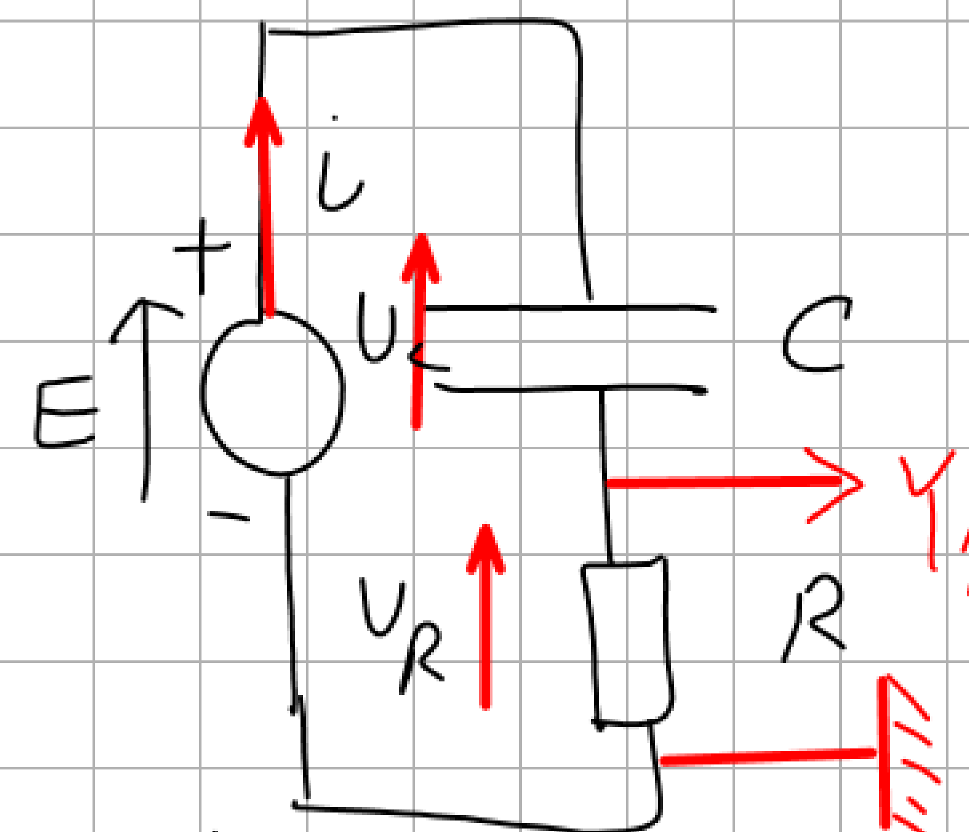
$$i(0) = \frac{E}{R} e^{0} = \frac{E}{R} = I_0$$

$$i(\tau) = \frac{E}{R} e^{-\frac{\tau}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-1} = 0{,}37 \frac{E}{R} = 37\%\, I_0$$

$$i(\infty) = 0$$

المعادلة التفاضلية بدلالة U_R و $\frac{dU_R}{dt}$

أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة U_R و $\frac{dU_R}{dt}$



$$U_C + U_R = E$$

$$\frac{q}{C} + U_R = E$$

نشتق الطرفين

$$\left(\frac{1}{C}\right)\frac{dq}{dt} + \frac{dU_R}{dt} = 0$$

$$\boxed{\frac{U_R}{CR} + \frac{dU_R}{dt} = 0}$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$U_R = Ri$$

$$U_R = R\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{U_R}{R}$$

$$U_C + U_R = \epsilon$$

$$\frac{q}{C} + U_R = \epsilon$$

$$\frac{1}{C}\frac{dq}{dt} + \frac{dU_R}{dt} = 0$$

$$\boxed{\frac{U_R}{RC} + \frac{dU_R}{dt} = 0} \quad \text{(I)}$$

$$U_R(t) = A e^{\alpha t} \quad (1) \quad \text{حلها}$$

$$\frac{dU_R}{dt} = A\alpha e^{\alpha t} \quad (2)$$

نعوض (1) و (2) في (I) نجد

$$U_R = Ri = R\frac{dq}{dt}$$

$$U_R = R\left(\frac{dq}{dt}\right)$$

$$\boxed{\frac{dq}{dt} = \frac{U_R}{R}}$$

$$A\alpha e^{\alpha t} + \frac{A e^{\alpha t}}{RC} = 0$$

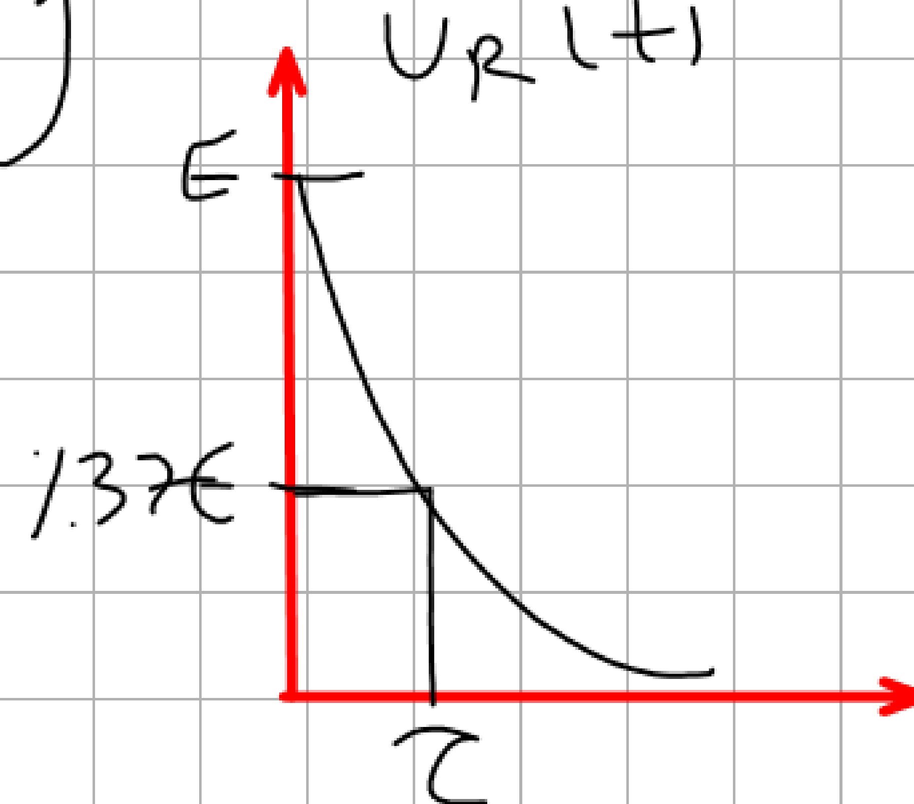
$$A e^{\alpha t}\left(\alpha + \frac{1}{RC}\right) = 0$$

$$\boxed{\alpha = -\frac{1}{RC}}$$

$$U_R(0) = A e^{\alpha \cdot 0} = A$$

$$\underbrace{U_C(0)}_{\to 0} + U_R(0) = E$$

$$U_R(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

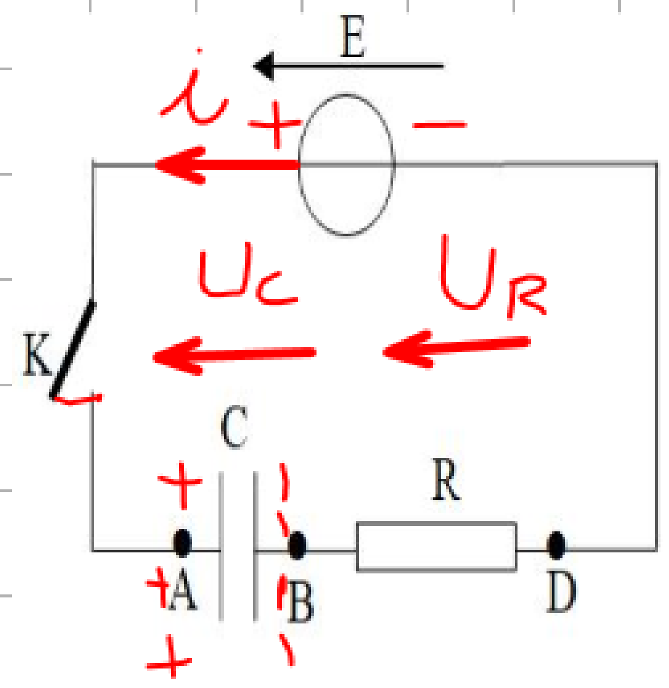


t	0	τ	∞
$U_R(t)$	E	$37\% E$	0

τ هو ثابت الزمن هو الزمن اللازم لبلوغ
63% من الشحنة الاعظمية

التمرين الأول:

يمثل الشكل المقابل دارة كهربائية تحوي على التسلسل مولد قوته المحركة الكهربائية $E=5V$، ومكثفة غير مشحونة سعتها $C=1,2\mu F$، وناقل أومي مقاومته $R=10K\Omega$ ، نغلق القاطعة K في اللحظة $t=0$.



1- أ/ ماهي الظاهرة التي تحدث في الدارة ؟

ب/ حدد على الشكل جهة التيار الذي يجتاز الدارة، مثل على الرسم بالأسهم التوترات u_C، u_R.

جـ/ ماهي إشارة q_A الشحنة التي يحملها اللبوس A ؟ أكتب العلاقة الجبرية بين q_A و q_B.

2- أ/ بالاعتماد على قانون جمع التوترات ، أنشئ المعادلة التفاضلية للدارة بدلالة u_C.

ب/ بين أن المعادلة التفاضلية تقبل العبارة: $u_C=E(1-e^{-\frac{t}{RC}})$ حلا لها.

جـ/ ماذا يمثل الجداء RC ، بين بالتحليل البعدي أنه متجانس مع الزمن.أحسب قيمته.

د/ استنتج العبارة الحرفية للشدة اللحظية للتيار الكهربائي $i(t)$.

3- أحسب قيمة الشحنة في النظام الدائم. وقيمة شدة التيار في اللحظة $t=0$.

1- الظاهرة المشاهدة هي شحن مكثفة

2- جهة i و U_C و U_R لاحظ الرسم

3- $q_B<0$ $q_A>0$

$|q_A|=|q_B|=q$ المكثفة حيث

كتابة المعادلة التفاضلية بدلالة U_C

قانون جمع التوترات

$$U_C + U_R = E$$

$$U_C + Ri = E$$

$$U_C + R\frac{dq}{dt} = E$$

$$U_C + RC\frac{dU_C}{dt} = E$$

$$\boxed{\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{RC} = \frac{E}{RC}}$$

$$U_C = \frac{q}{C}$$

$$q = C\,U_C$$

$$\frac{dq}{dt} = C\frac{dU_C}{dt}$$

بين أن $U_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ حلا لها

$$\frac{dU_C}{dt} = \left(E - E e^{-\frac{t}{RC}}\right)'$$

$$= \frac{E}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{RC} = \frac{E}{RC} \quad \ldots \; I$$

$$\left(e^{\left(-\frac{1}{RC}\right)(t)}\right)' = -\frac{1}{RC}\, e^{-\frac{1}{RC}x}$$

$$U_C = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad \ldots \; (1)$$

$$\frac{dU_C}{dt} = E\left(0 + \frac{1}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}\right) = \frac{E}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}} \quad \ldots \; (2)$$

نعوض (1) و (2) في I

$$\frac{E}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}{RC} \overset{?}{=} \frac{E}{RC}$$

$$\cancel{\frac{E}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}} + \cancel{\frac{E}{RC}} - \cancel{\frac{E}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}} = \cancel{\frac{E}{RC}}$$

محققة $0 = 0$

يمثل الجداء RC ثابت الزمن τ هو زمن بلوغ 63%
من الشحنة الاعظمية

$10K\Omega = 10 \cdot 10^{3}\Omega$

$1,2\mu F = 1,2\,10^{-6} F$

τ

$\tau = RC$

اسقاط 63%

$$\tau = R \cdot C = 10\,10^{3}\,(1,2\,10^{-6})$$

$$\boxed{\tau = 1,2\,10^{-2}\ s}$$

التحليل البعدي τ

$\tau = RC$

$[\tau] = [R]\,[C]$

$[T]$

$[I]$

$[U]$

$$U_R = R\,i \qquad R = \frac{U_R}{I}$$

$$[R] = \frac{[U]}{[I]} \quad \ldots \quad (1)$$

$$[\tau] = \frac{\cancel{U}}{\cancel{I}} \cdot \frac{\cancel{I}\,T}{\cancel{U}}$$

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{I\,t}{C} = U_c$$

$$[\tau] = [T] = (s)$$

$$C = \frac{[I][T]}{[U]} \quad \ldots \quad (2)$$

$$[\tau] = [R] \cdot [C]$$

استناج العبارة الحرفية لـ $i(t)$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d\,C \cdot u_C(t)}{dt} = C\,\frac{du_C}{dt}$$

$$i(t) = C\,\frac{d\left(E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\right)}{dt} = \cancel{C}\,\frac{E}{R\cancel{C}}\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\,e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

$I_0 = i(0)$ حسب

$$I_0 = i(0) = \frac{E}{R}\,e^{0} = \frac{E}{R}$$

$$I_0 = \frac{E}{R} = \frac{5}{10\,10^{3}} = 5\,10^{-4}$$

$$\boxed{I_0 = 5 \cdot 10^{-4}\,A}$$

حساب الشحنة الأعظمية q_{max}

$$U_c = \frac{q}{C}$$

$$U_{c\,max} = \frac{q_{max}}{C} = E$$

$$q_{max} = E \cdot C = 5\,(1{,}2\ 10^{-6})$$

$$= 6{,}2\ 10^{-6}\ C.$$

التمرين الثاني:

تتكون دارة كهربائية على التسلسل من: مولد للتوتر قوته المحركة الكهربائية E، ناقل أ ومي مقاومته $R = 1k\Omega$ ومكثفة سعتها C وقاطعة K .نغلق القاطعة في اللحظة $t = 0$.

1- جد المعادلة التفاضلية للدارة بدلالة $q(t)$ خلال شحن المكثفة.

2- حل المعادلة التفاضلية السابقة، يعطى بالشكل: $q(t) = Ae^{\alpha.t} + B$.

جد عبارة كل من A, B, α .

3- المنحنى -1 يمثل تطور شحنة المكثفة $q(t)$ بدلالة الزمن t .

أ/ استنتج بيانيا قيمة τ ثابت الزمن، ثم أحسب C سعة المكثفة.

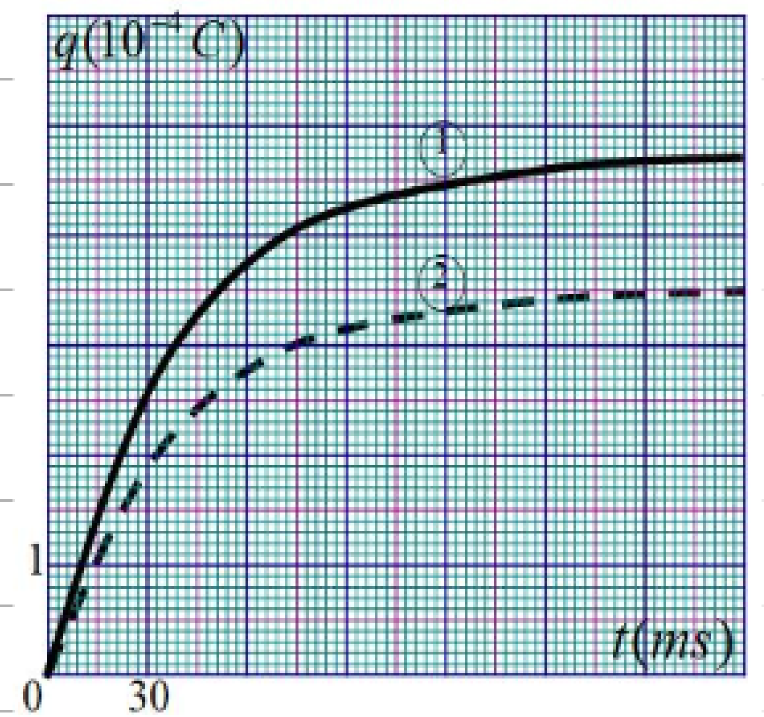
ب/ استنتج قيمة E القوة المحركة الكهربائية للمولد.

ج/ أحسب التوترين u_C و u_R بين طرفي المكثفة والناقل الأومي واستنتج شدة التيار i المارة في الدارة في اللحظة $t = 30ms$.

د/ أحسب الطاقة الكهربائية المخزنة في المكثفة في اللحظة $t = 30ms$.

4- المنحنى -2 تحصلنا عليه عند استبدال أحد عناصر الدارة.

- حدد العنصر المستبدل وأحسب قيمته الجديدة.



5. الطاقة المخزنة في المكثفة

عند شحن المكثفة تخزن طاقة كهربائية تقوم بتحويلها إلى الدارة أثناء التفريغ وتعطى عبارتها كما يلي:

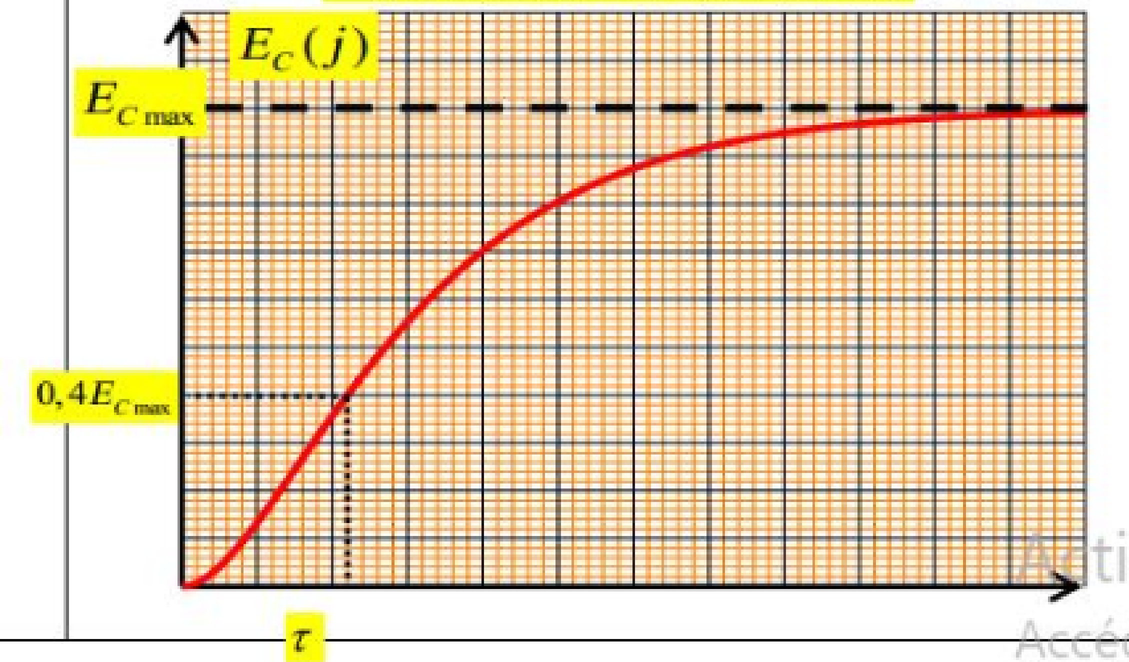
$$E_C(t)=\frac{1}{2}C.U_c(t)^2=\frac{1}{2}.\frac{q(t)^2}{C}=\frac{1}{2}U_c(t).q(t)$$

حالة الشحن

$$E_C(t)=\frac{1}{2}C.U_C^2$$

$$E_C(t)=\frac{1}{2}C.E^2(1-e^{-\frac{t}{\tau}})^2$$

$$\boxed{E_C(t)=E_{C\max}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})^2}$$

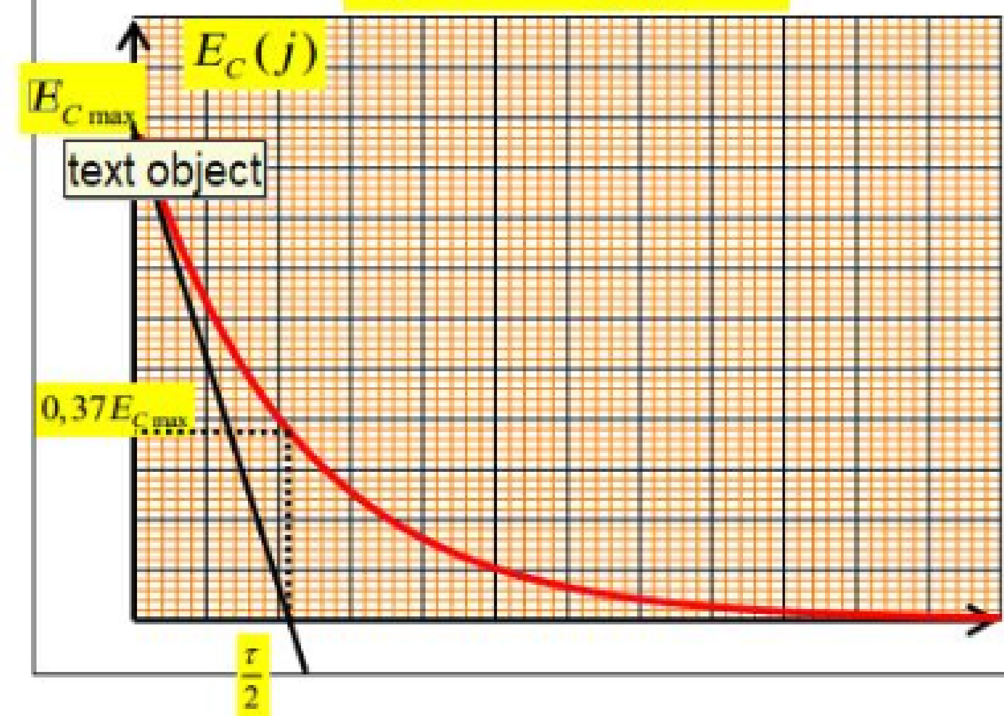


حالة التفريغ

$$E_C(t)=\frac{1}{2}C.U_C^2$$

$$E_C(t)=\frac{1}{2}C.E^2\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2$$

$$E_C(t)=E_{C\,max}\,e^{-2\frac{t}{\tau}}$$



<u>التمرين الثالث:</u>

تتكون دارة كهربائية على التسلسل من مولد ذي توتر ثابت E ومكثفة فارغة سعتها C ، وناقل أومي مقاومته $R = 1k\Omega$ ، وقاطعة K .نغلق القاطعة في اللحظة $t = 0$.

1-نتابع تطور التوتر الكهربائي u_R بين طرفي الناقل الأومي R باستعمال راسم الاهتزاز المهبطي ذي ذاكرة.

أ/ أرسم مخطط الدارة وبين كيفية ربط راسم الاهتزاز المهبطي.

ب/متابعة التوتر الكهربائي $u_R(t)$ مكننا من متابعة تطور شدة التيار الكهربائي $i(t)$ المار في الدارة. فسر .

2-أ/بين أن المعادلة التفاضلية لشدة التيار الكهربائي $i(t)$ المار في الدارة تعطى بالعلاقة: $\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC} i(t) = 0$.

ب/بتطبيق قانون جمع التوترات بين أن: $i(0) = \frac{E}{R}$ ، وعين الثابتين α و A للعبارة: $i(t) = A.e^{-\alpha t}$ حل المعادلة التفاضلية السابقة.

3-يمثل المنحنى المقابل تطور التيار شدة التيار خلال الزمن.أوجد بيانيا:

أ/شدة التيار الأعظمية I_0 ، واستنتج القوة المحركة الكهربائية للولد E .

ب/ثابت الزمن τ واستنتج السعة المكثفة C المكثفة.

4-نستبدل الناقل الأمي بناقل أومي مقاومته $R = 2k\Omega$ ، مثل على الشكل كيفيا منحني تطور شدة التيار في هذه الحالة .