① الدّالة ومجموعة التعريف:

تعريف:

D جزء من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

إذا كانت D هي **مجموعة تعريف** الدّالة f فإنّ f **تُرفق** بكل عدد حقيقي x من D، عدداً حقيقيا وحيداً نرمز له بالرمز $f(x)$. نقول أنّ $f(x)$ هي **صورة** x بالدّالة f.

- مجموعة تعريف دالة f هي مجموعة الأعداد الحقيقية x التي يكون من أجلها حساب $f(x)$ ممكناً.

التمرين الأول:

عيّن مجموعة تعريف الدّالة f في كل حالة من الحالات التالية:

10 $f(x)=x^3-2x+5$

11 $f(x)=\dfrac{x^2-3}{7}$

12 $f(x)=x^2-|x+1|$

13 $f(x)=x-\dfrac{1}{2x}$

14 $f(x)=x+1-\dfrac{1}{x-4}$

15 $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2-4}$

16 $f(x)=\dfrac{5}{2x^2+1}$

17 $f(x)=\dfrac{x^2}{|x-3|}$

18 $f(x)=\dfrac{x^2}{|x|-3}$

19 $f(x)=x-\sqrt{x-1}$

20 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{2x-6}$

21 $f(x)=\sin x-3\cos x$

الحل:

(1.0) $f(x) = x^3 - 2x + 5$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

(1.1) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{7}$

$D_f = \mathbb{R}$

(1.2) $f(x) = x^2 - |x+1|$

$D_f = \mathbb{R}$

(1.3) $f(x) = x - \frac{1}{2x}$

f معرفة لما $2x \neq 0$ أي $x \neq 0$

ومنه $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

(1.4) $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x-4}$

f معرفة لما $x - 4 \neq 0$ أي $x \neq 4$

ومنه $D_f = \mathbb{R} - \{4\}$

(1.5) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-4}$

f معرفة لما $x^2 - 4 \neq 0$

لكل $x^2-4=0$ أي $(x-2)(x+2)=0$

ومنه $x=2$ أو $x=-2$

بأن $x^2-4\neq 0$ يعني $x\neq 2$

و $x\neq -2$

$D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

$D_f=]-\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[$

$f(x)=\dfrac{5}{2x^2+1}$ (1.6)

معرفة لما $2x^2+1\neq 0$

المعادلة $2x^2+1=0$ لا حل لها

$1>0$ ، $2x^2\geq 0$ أو $\Delta<0$

ومنه $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=\dfrac{x^2}{|x-3|}$ (1.7)

معرفة لما $|x-3|\neq 0$

$x-3\neq 0$ أي $x\neq 3$

$D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-3;3\}$

1.9

$f(x) = x - \sqrt{x-1}$

معرفة لما $x-1 \geq 0$

أي $x \geq 1$ ومنه $D_f = [1;+\infty[$

2.5

$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{2x-6}$

معرفة لما $x-2 \geq 0$ و $2x-6 \neq 0$

ص: $x \geq 2$ و $x \neq 3$

1.8

$f(x) = \frac{x^2}{|x|-3}$

$|x|-3 \neq 0$:

نحل $|x|-3=0$

تكافئ $|x|=3$

أي $x=3$ أو $x=-3$

ت

1) $|x|=a$ مع a موجب

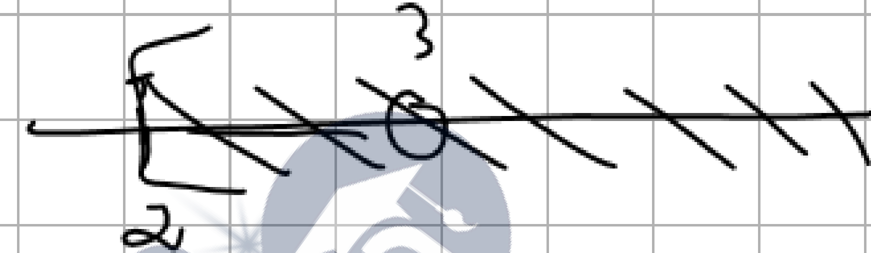
تكافئ $x=a$ أو $x=-a$

2) $|x|=b$ و b سالب

لا حل لها

ت

$x \neq 3$ و $x \in [2;+\infty[$



$D_g = [2;3[\cup]3;+\infty[$

$f(x) = \sin x - 3\cos x$ R.1

$D_f = \mathbb{R}$

التمرين الثاني:

عين مجموعة تعريف الدوال التالية :

1) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

2) $g(x) = \sqrt{x-1}$

3) $h(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$

4) $k(x) = \frac{2x+5}{x^2-x-1}$

5) $l(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$

6) $m(x) = \frac{\sqrt{-x+4}}{x^2-10x+24}$

$D_f = \mathbb{R}$

$D_g = [1; +\infty[$

$x^2+1 \neq 0$

$\mathbb{R}$

$-x+4 \geq 0$ و $x^2-10x+24 \neq 0$

$x^2+1=0$ مستحيل

③ $h(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$

$x-3 \neq 0$ و $\frac{x+3}{x-3} \geq 0$

$\frac{x+3}{x-3}$ ندرس إشارة

x	$-\infty$		-3		3		
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+3}{x-3}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$D_h =]-\infty; -3] \cup]3; +\infty[$

$$f(x)=\frac{2x+5}{x^2-x-1}$$

معرفة لما $x^2-x-1\neq 0$

نحل $x^2-x-1=0$

$a=1 \quad b=-1 \quad c=-1$

نحسب Δ

$\Delta=b^2-4ac$

$=(-1)^2-4(1)(-1)$

$=1+4=5>0$

المعادلة حلين

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

$$h(x) = \frac{\sqrt{-x+4}}{x^2-10x+24}$$

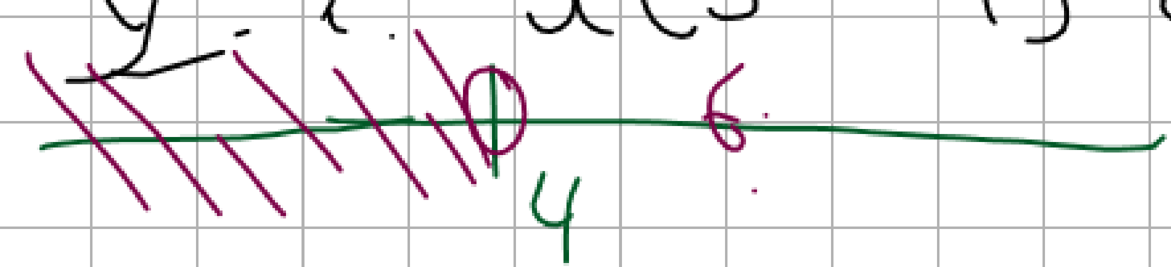
معرفة لما: $-x+4 \geq 0$ و $x^2-10x+24 \neq 0$

$-x+4 \geq 0$ تكافئ $-x \geq -4$ ومنه $x \leq 4$ ، $x \in]-\infty;4]$

نحل $x^2-10x+24=0$ نجد $\Delta = b^2-4ac = (-10)^2-4(1)(24) = 4 = 2^2$

ومنه $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10+2}{2} = 6$ أو $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10-2}{2} = 4$

ومنه $x \in]-\infty;4]$ و $x \neq 4$ و $x \neq 6$



$$\boxed{D_f =]-\infty;4[}$$

التقاطع

$x^2-10x+24\neq 0$ و $-x+4\geq 0$

$x\neq 6$ و $x\neq 4$ و $x\leq 4$

$x\neq 6$ و $x\neq 4$ و $]-\infty;4]$

② التمثيل البياني لدّالة:

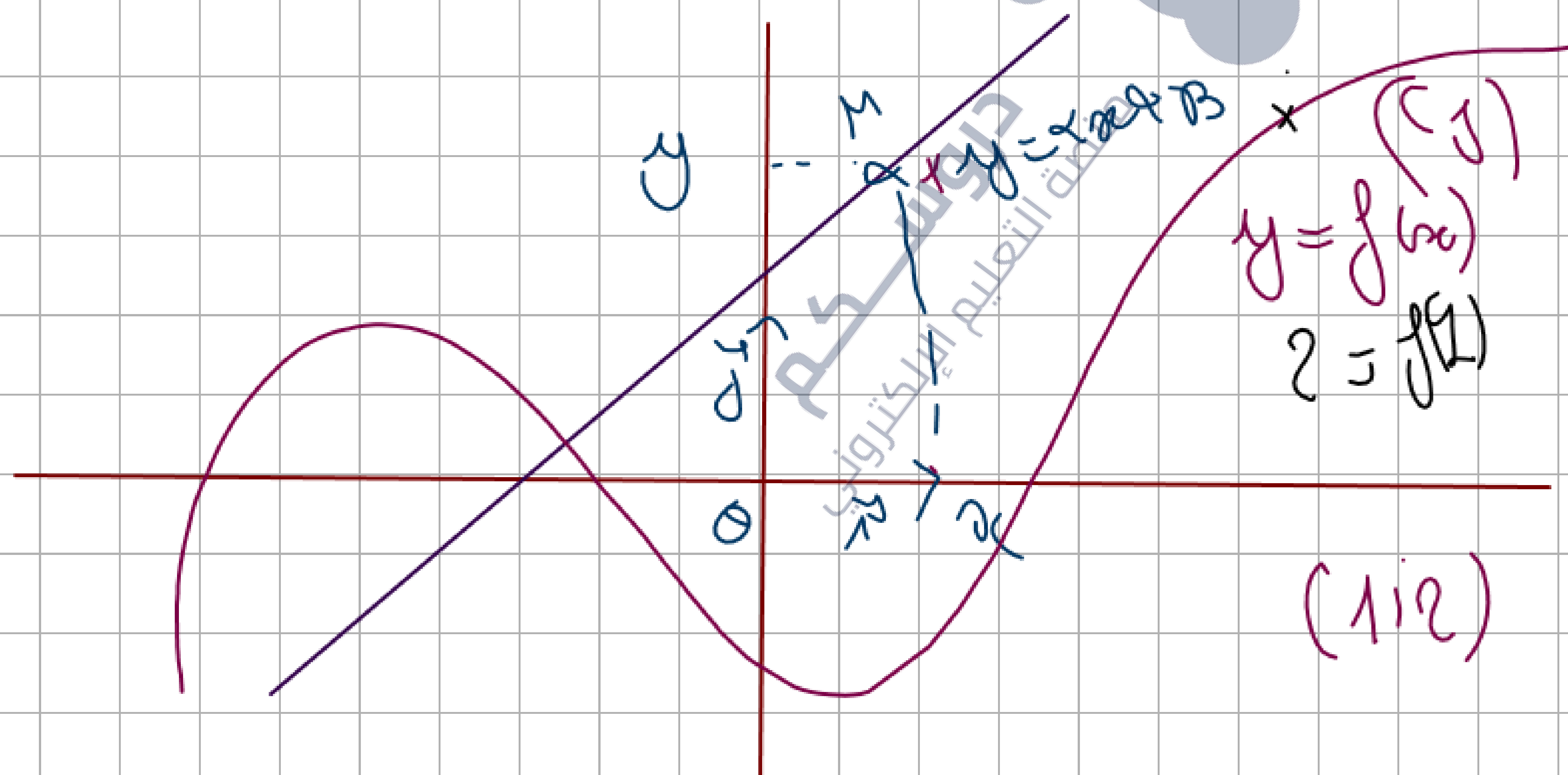
تعريف:

f دّالة و D مجموعة تعريفها.

التمثيل البياني (**أو المنحنى الممثل**) للدّالة f في معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ للمستوي، هو مجموعة النقط $M\left(x;y\right)$

حيث: $x \in D$ و $y = f\left(x\right)$.

➤ إذا رمزنا إلى منحنى الدّالة f بالرمز $\left(C\right)$، فإنّ: $y = f(x)$ هي معادلة $\left(C\right)$ في المعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.



③ اتجاه تغيّر دّالة على مجال:

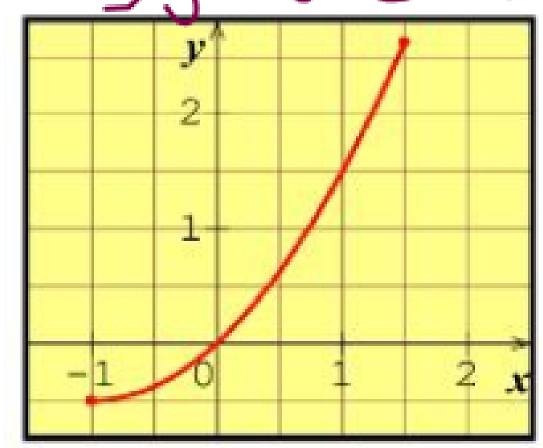
f دّالة معرّفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

تعاريف:

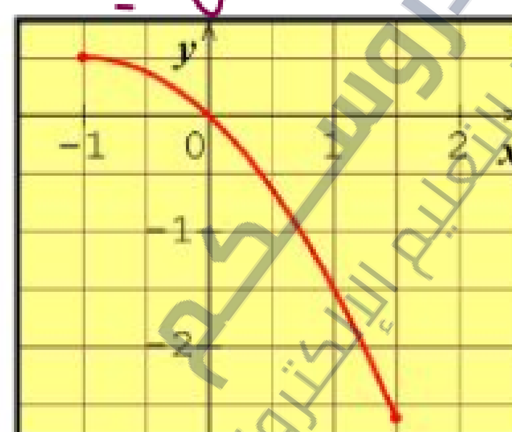
f **متزايدة تماما** على I	f **متناقصة تماما** على I	f **ثابتة** على I
يعني أنّه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 وَ x_2 من I، إذا كان: $x_1 < x_2$ فإن: $f(x_1) < f(x_2)$.	يعني أنّه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 من I، إذا كان: $x_1 < x_2$ فإن: $f(x_1) > f(x_2)$.	يعني أنّه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 من I، فإنّ: $f(x_1) = f(x_2)$.

تحافظ على الترتيب

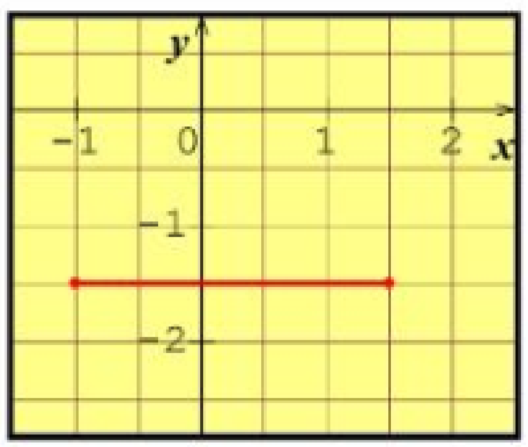
تعكس الترتيب



f **متزايدة تماما** على $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$



f **متناقصة تماما** على $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$



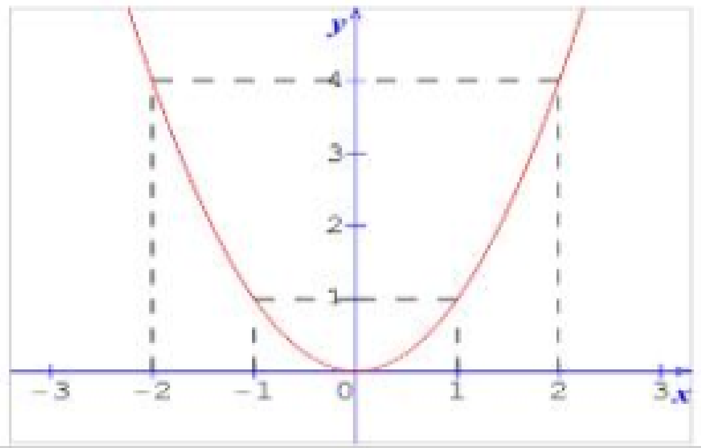
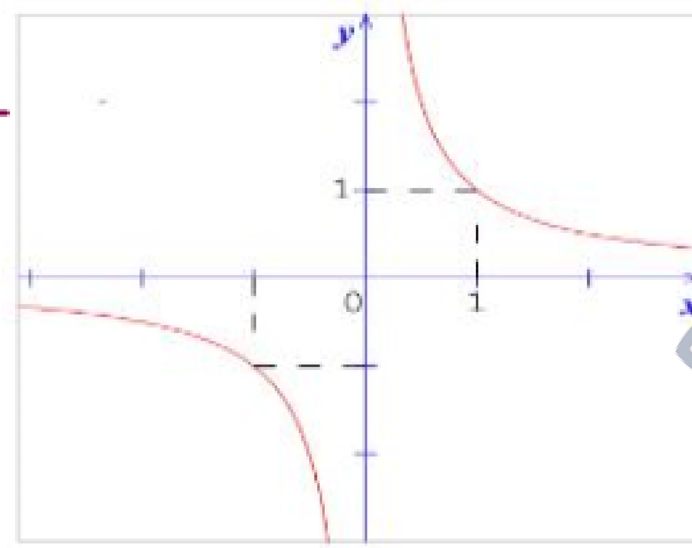
f **ثابتة** على $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$

ملاحظة:

➤ إذا كانت الدّالة f إما متزايدة وإما متناقصة على مجال I نقول أنّها رتيبة على هذا المجال.

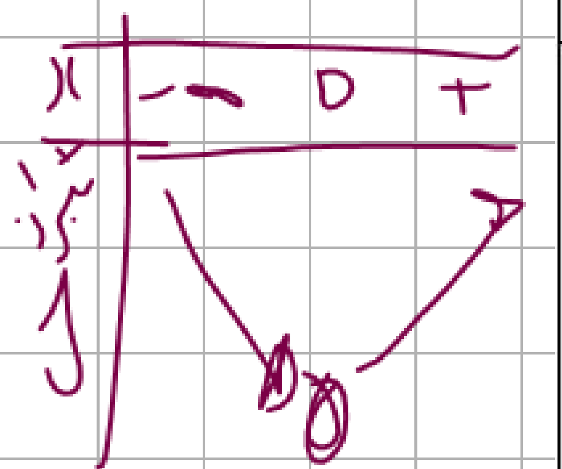
الدوال المرجعية:

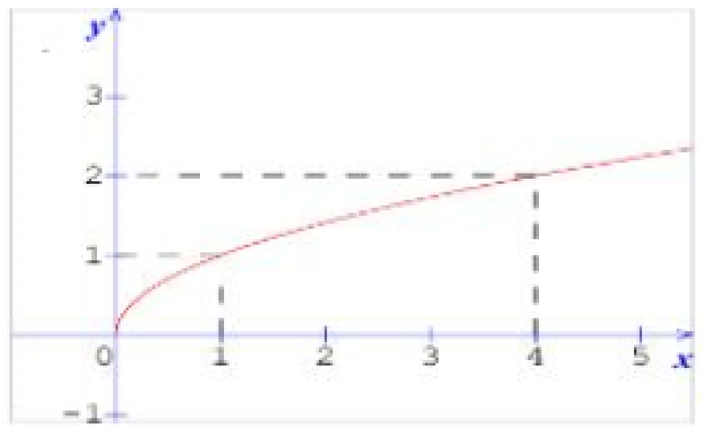
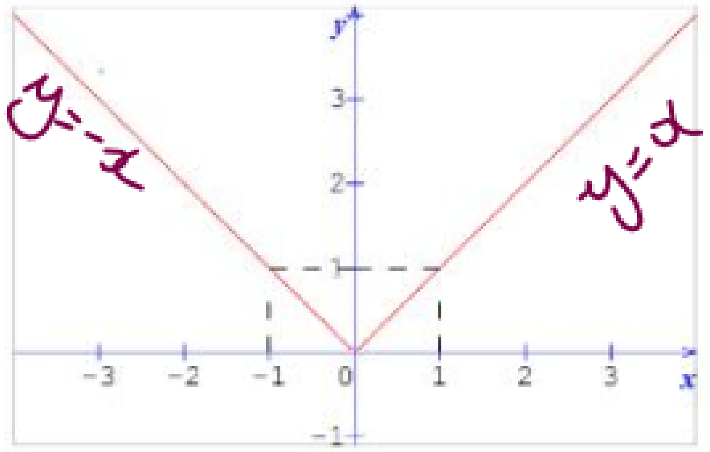
نلخص في الجدول الموالي تذكيرا ببعض الدّوال المرجعية التي دُرست في السنة الأولى ثانوي

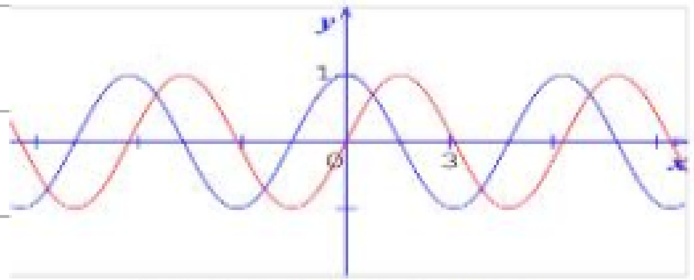
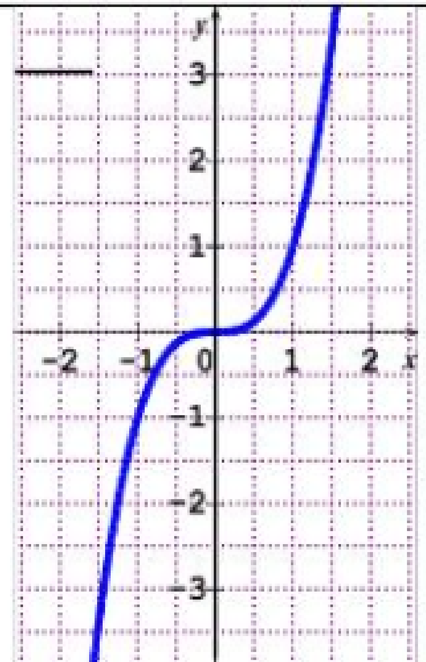
الدّالة	اتجاه التغيّر	التمثيل البياني
$D_f = \mathbb{R}$ $f : x \mapsto x^2$ زوجية	f متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ إذا كان $a < b \le 0$ فإنّ $a^2 > b^2$ f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ إذا كان $0 \le a < b$ فإنّ $a^2 < b^2$	
$\mathbb{R}^*$ $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ فردية	f متناقصة تماما على $]-\infty;0[$ إذا كان $a < b < 0$ فإنّ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ f متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ إذا كان $0 < a < b$ فإنّ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	

x	$-\infty$	0	$+\infty$
تغيرات الدالة	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
تغيرات الدالة	↘	‖	↘



$[0;+\infty[$ $f:x\mapsto\sqrt{x}$	f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ إذا كان $0\leq a<b$ فإنّ $\sqrt{a}<\sqrt{b}$	
زوجية $f:x\mapsto\lvert x\rvert$ $\mathbb{R}$	f متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ إذا كان $a<b\leq 0$ فإنّ $\lvert a\rvert>\lvert b\rvert$ f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ إذا كان $0\leq a<b$ فإنّ $\lvert a\rvert<\lvert b\rvert$	

$f : x \mapsto \sin x$ $g : x \mapsto \cos x$ IR	الدّالتان $g : x \mapsto \cos x$ وَ $f : x \mapsto \sin x$ دوريتان دورهما 2π	
$f : x \mapsto x^3$ IR	f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ إذا كان $a < b$ فإنّ $a^3 < b^3$	

$A > B \Rightarrow A - B > 0$

$A < B \Rightarrow A - B < 0$

$A = B \Rightarrow A - B = 0$

$x_1 ; x_2 \in IR$

$x_1 > x_2$; $f(x) = x^3$

$f(x_1) - f(x_2)$

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3$$

$$=(x_1-x_2)(\text{موجب})$$

إشارة $f(x_1)-f(x_2)$ من إشارة x_1-x_2

$f(x_1)>f(x_2)$ ، $f(x_1)-f(x_2)>0$ و $x_1-x_2>0$

ومنه f متزايدة تماما

على $\mathbb{R}$

التمرين الثالث:

$x_1^2+4x_1+1$

i)نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR كما يلي $f(x)=x^2+4x+1$

(Cf) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x فان : $f(x)=(x+2)^2-3$.

2/أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجالين $]-\infty;-2];[-2;+\infty[$.

3/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

4/ (Cf) منحى الدالة f هو صورة لمنحى الدالة مربع بانسحاب. عين شعاع هذا الانسحاب.

5/أنشيء (Cf) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

ii) g دالة تآلفية معرفة على IR ب : $g(x)=2x+1$

1أدرس اتجاه تغير الدالة g على IR.

2/ منحى الدالة g عبارة عن مستقيم أنشاه في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

3/ حل بيانيا المعادلة $f(x)=g(x)$ ثم تحقق من ذلك جبريا.

4/ حل بيانيا المتراجحة $f(x)\le g(x)$.

$x^2+4x+1=0$

①

$(x+2)^2-3=x^2+4x+4-3$

$=x^2+4x+1$

$=f(x)$

② دراسة اتجاه التغير $[-2;+\infty[$

ليكن x_1 و x_2 من $[-2;+\infty[$

حيث $-2\le x_1<x_2$

نضيف 2: $0\le x_1+2<x_2+2$

بالتربيع $(x\ge 0)$: $(x_1+2)^2<(x_2+2)^2$

نضيف -3 نجد

حيث $x_1 < x_2 < -2$

نضيف 2 : $x_1+2 < x_2+2 < 0$

بالتربيع $(x_1+2)^2 > (x_2+2)^2$

نضيف -3 : $(x_1+2)^2-3 > (x_2+2)^2-3$

$f(x_1) > f(x_2)$

منه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty,-2]$

$(x_1+2)^2-3 < (x_2+2)^2-3$

$f(x_1) < f(x_2)$

ومنه $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) < f(x_2)$

إذن f متزايدة تماما على $[-2,+\infty[$

على المجال $]-\infty,-2]$

ليكن x_1 و x_2 من $]-\infty,-2]$

لتكن $M(x;y)$ نقطة من (C_f)

لدينا $y=f(x)$

ومنه $y=(x+2)^2-3$

ومنه $(*)\quad y+3=(x+2)^2$

$Y \quad X$

نضع $\begin{cases} X=x+2 \\ Y=y+3 \end{cases}$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
تغيرات f	↘	-3	↗

نبين أن (C_f) صورة منحنى الدالة

مربع (C) بانسحاب شعاعه

العلاقة (ه) تصبح $Y = X^2$

معناه النقطة $M'(X;Y)$

تنتمي إلى منحنى الدالة مربع

نحسب مركبات الشعاع $\overrightarrow{M'M}$

$\overrightarrow{M'M}\begin{pmatrix}x-(x+2)\\y-(y+3)\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M'M}\begin{pmatrix}x-X\\y-Y\end{pmatrix}$

$\vec{u}($

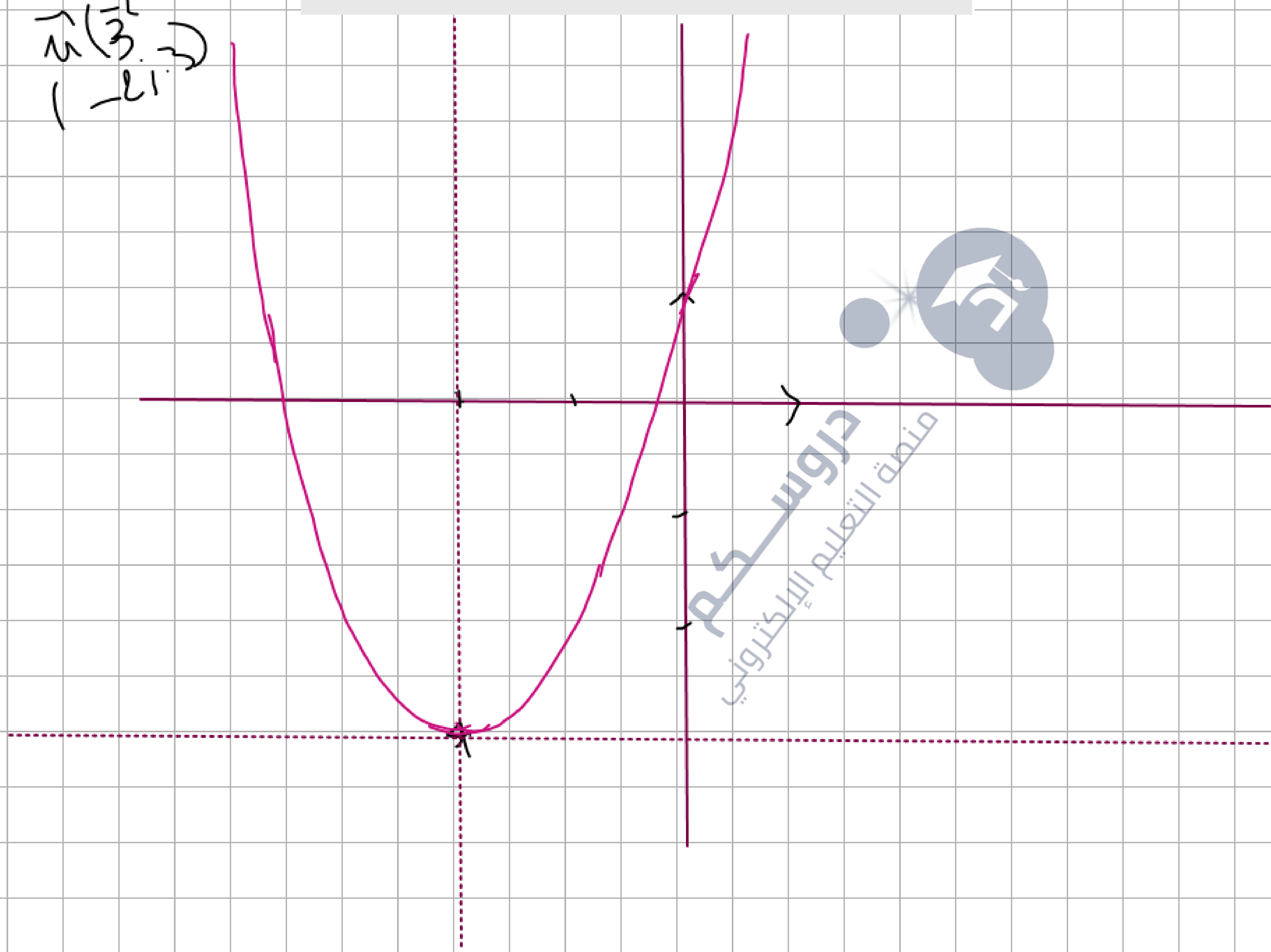
ومنه $\overrightarrow{M'M}\begin{pmatrix}\cancel{x}-\cancel{x}-2\\ \cancel{y}-\cancel{y}-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{M'M}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$

ومنه (C_g) هو صورة الدالة مربع بالانسحاب الشعاع $\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$

$(x+a)^2+b$

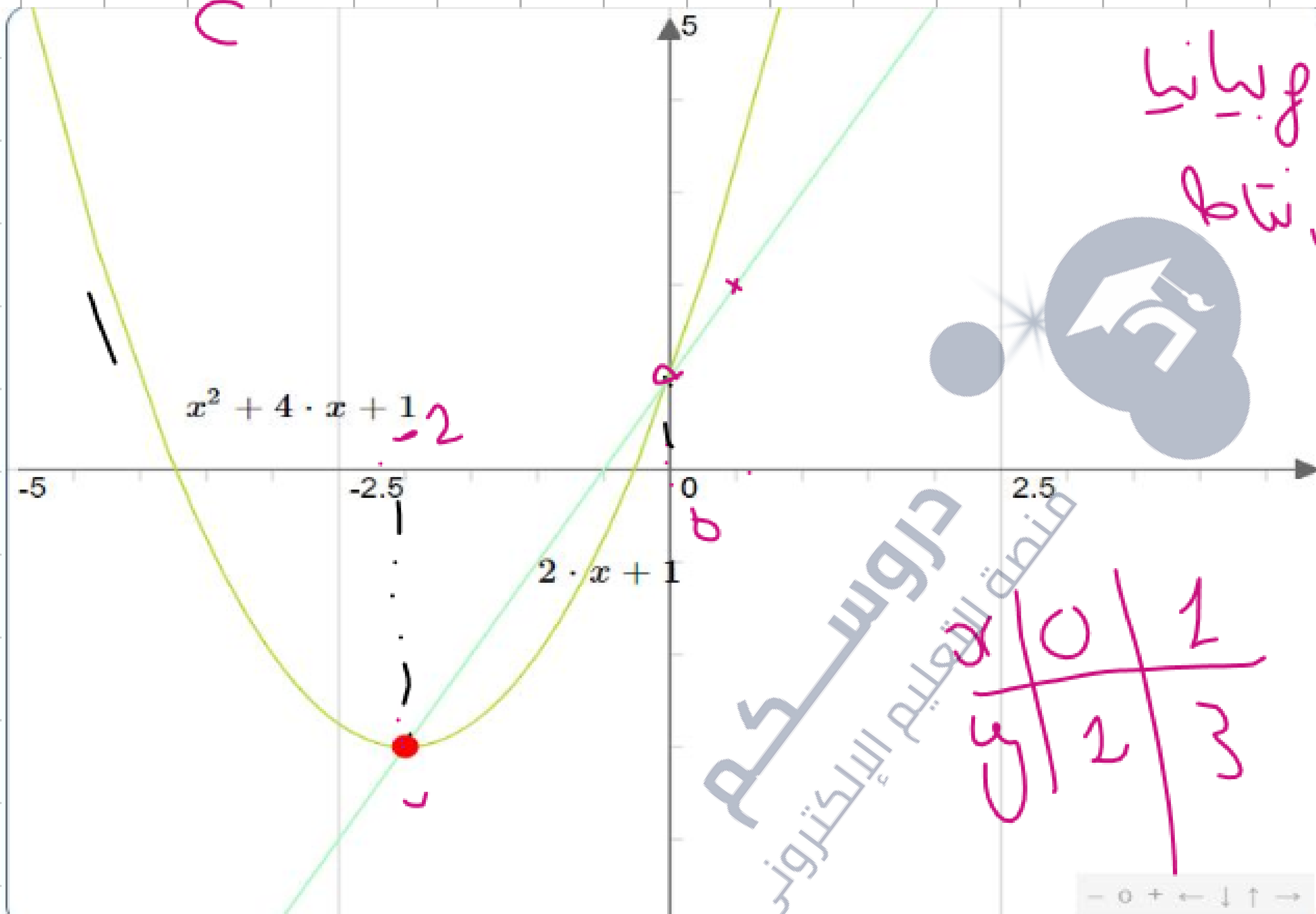
$\vec{u}\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$



أين يكون (C_f) تحت (C_g)

$f(x) \leq g(x)$

$[-2;0]$



بيانيا $f(x)=g(x)$

هي فواصل نقاط التقاطع

$[-2;0]$

x	0	1
y	1	3

حل: $x^2+4x+1 \leq 2x+1$

التمرين الرابع:

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $IR-\{2\}$ كما يلي $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$

(Cf) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي من x من $IR-\{2\}$ فان $f(x)=1+\frac{1}{x-2}$.

2/أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]-\infty;2[$ و $]2;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ بين كيف يمكن انشاء (Cf) منحى الدالة f انطلاقا من منحى الدالة مقلوب $\frac{1}{x}$.

4/أنشيء (Cf) في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

①

$$1+\frac{1}{x-2}=\frac{1\times(x-2)+1}{x-2}=\frac{x-2+1}{x-2}=\frac{x-1}{x-2}=f(x)$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

ليكن $x_1,x_2\in]2;+\infty[$ حيث

$2<x_1<x_2$

$0<x_1-2<x_2-2$ نضيف -2

$\frac{1}{x_1-2}>\frac{1}{x_2-2}$ نكتب المقلوب

$1+\frac{1}{x_1-2}>1+\frac{1}{x_2-1}$ نضيف 1

$f(x_1)>f(x_2)$

$$1+\frac{1}{x-2}=\frac{x-2+1}{x-2}$$

$$=\frac{x-1}{x-2}$$

نعني أن f متناقصة تماما على $]2;+\infty[$

بنفس الطريقة نبين أن f متناقصة تماما على $]-\infty;2[$

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{3\times7+2\times5}{5\times7}$$

$$=\frac{21+10}{35}$$

$$=\frac{31}{35}$$

نبرهن أن (C_g) هو صورة منحنى الدالة مقلوب

بانسحاب يعين شعاعه :

لتكن $M(x;y)$ نقطة من (C_g)

يعني : $y = f(x)$

$(*)$ $y = 1 + \frac{1}{x-2}$

ومنه $y-1 = \frac{1}{x-2}$

$Y \qquad X$

نضع $\begin{cases} X = x-2 \\ Y = y-1 \end{cases}$

العلاقة $(*)$:

$Y = \frac{1}{X}$

معناه $M'(X;Y)$ تنتمي

إلى الدالة مقلوب

حسب مركبتا الشعاع $\vec{M'M}$

لدينا $\vec{M'M}\begin{pmatrix} x-X \\ y-Y \end{pmatrix}$

$\vec{M'M}\begin{pmatrix} x-(x-2) \\ y-(y-1) \end{pmatrix}$

أي $\vec{M'M}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع الانسحاب